CONVEXITÉ

I. Dérivée seconde

Définition : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I dont la dérivée f' est dérivable sur I.
On appelle **fonction dérivée seconde** de f sur I la dérivée de f' et on note :
$f''(x) = \left(f'(x)\right)'$.

Exemple :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$.

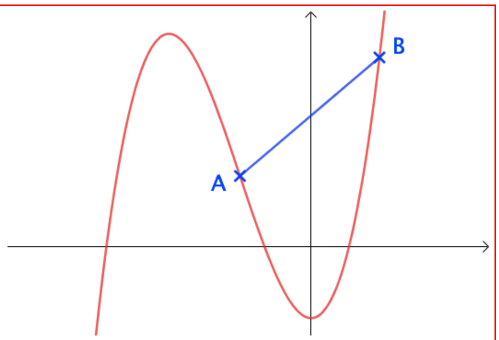
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 9x^2 - 10x$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f''(x) = \left(f'(x)\right)' = 18x - 10$.

II. Fonction convexe et fonction concave

Vidéo https://youtu.be/ERML85y_s6E

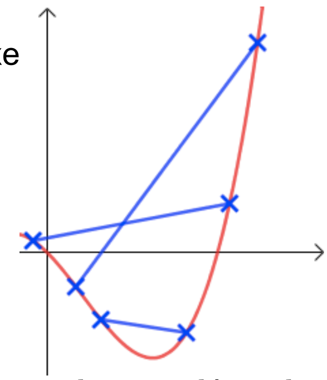
1) Définitions avec les cordes

Définition : Une **corde** est un segment reliant deux points d'une courbe.

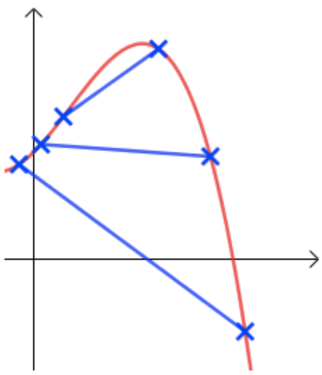


Définitions : Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
- La fonction f est **convexe** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses cordes.
- La fonction f est **concave** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses cordes.

Fonction convexe

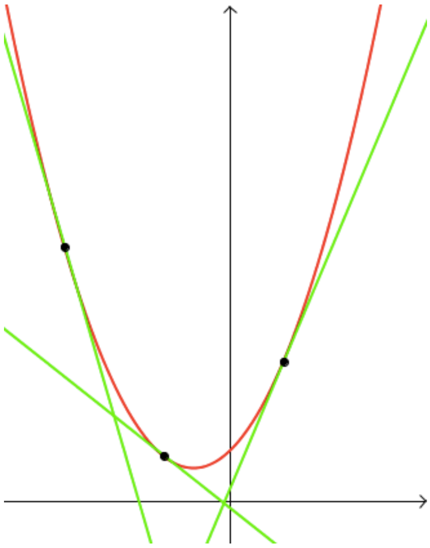


Fonction concave

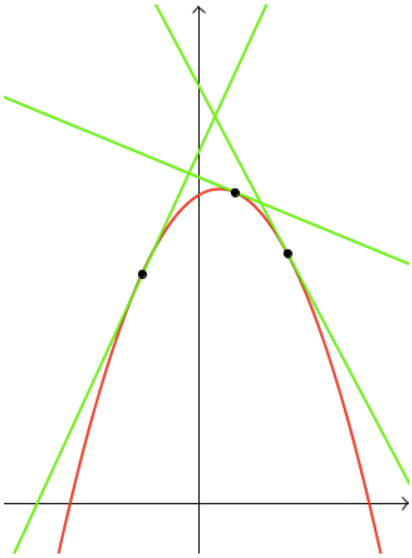


2) Définitions avec les tangentes

Définitions : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.
- La fonction f est **convexe** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- La fonction f est **concave** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



Fonction convexe



Fonction concave

3) Propriétés

Propriétés :
- La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
- La fonction cube $x \longmapsto x^3$ est concave sur $]-\infty\,;0]$ et convexe sur $[0\,;\,+\infty[$.
- La fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty\,;0[$ et convexe sur $]0\,;\,+\infty[$.
- La fonction racine carrée $x \longmapsto \sqrt{x}$ est concave sur $[0\,;\,+\infty[$.

Propriété : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.
- La fonction f est convexe sur I, si sa dérivée f' est croissante sur I, soit
$f''(x) \geq 0$, pour tout x de I.
- La fonction f est concave sur I, si sa dérivée f' est décroissante sur I, soit
$f''(x) \leq 0$, pour tout x de I.

- Admis -

Méthode : Étudier la convexité d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/8H2aYKN8NGE

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$.
Étudier la convexité de la fonction f.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = x^2 - 18x$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f''(x) = 2x - 18$ qui s'annule pour $x = 9$.

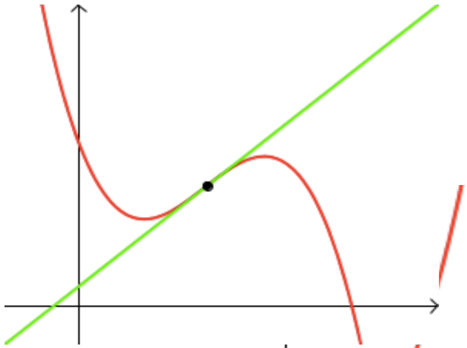
Pour tout $x \leq 9$, $f''(x) \leq 0$.
Pour tout $x \geq 9$, $f''(x) \geq 0$.

Donc f est concave sur $]-\infty\,; 9]$ et f est convexe sur $[9\,;\, +\infty[$.

III. Point d'inflexion

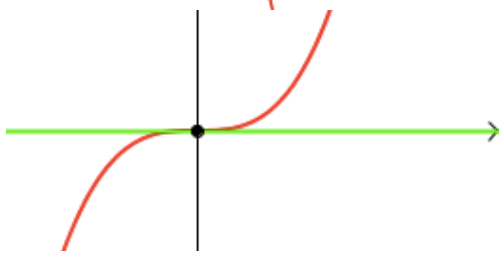
Vidéo https://youtu.be/r8sYr6ToeLo

Définition : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.
Un **point d'inflexion** est un point où la courbe traverse sa tangente en ce point.



Remarque importante :
Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.
Exemple :
On considère la fonction cube $x \longmapsto x^3$.
La tangente au point O(0,0) est l'axe des abscisses.

Pour $x \leq 0$, la courbe est en dessous de sa tangente.
Pour $x \geq 0$, la courbe est au-dessus de sa tangente.



La tangente à la courbe en O traverse donc la courbe.
Le point O est un point d'inflexion de la courbe de la fonction cube.

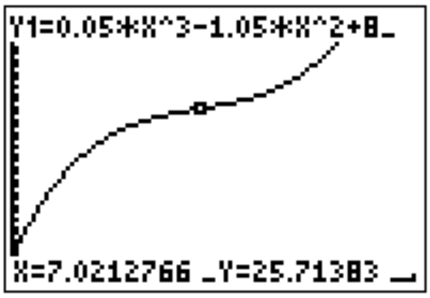
Méthode : Étudier la convexité pour résoudre un problème

Vidéo https://youtu.be/_XlgCeLcN1k

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10 000 par mois.
Le coût de fabrication C (en milliers d'euros) de x milliers de clés produites s'exprime par : $C(x) = 0{,}05x^3 - 1{,}05x^2 + 8x + 4$.

1) À l'aide de la calculatrice graphique, conjecturer la convexité de la fonction C.
En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.
2) Démontrer ces résultats.
3) Interpréter les résultats obtenus au regard du contexte de l'exercice.

1) L'entreprise fabrique au maximum de 10 000 clés par mois donc la fonction C est définie sur [0 ; 10].
La fonction semble concave sur l'intervalle [0 ; 7] et convexe sur l'intervalle [7 ; 10].
La courbe semble posséder un point d'inflexion pour $x = 7$.



2) $C(x) = 0{,}05x^3 - 1{,}05x^2 + 8x + 4$
Donc : $C'(x) = 0{,}15x^2 - 2{,}1x + 8$
Et : $C''(x) = 0{,}3x - 2{,}1$

Or, $0{,}3x - 2{,}1 = 0$ pour $x = 7$.
On peut ainsi résumer les variations de C' et la convexité de C dans le tableau suivant :

x	0		7		10
$C''(x)$		$-$	0	+	
$C'(x)$		↘		↗	
Convexité de C		concave		convexe	

$C(7) = 25{,}7$
Ainsi, le point de coordonnées (7 ; 25,7) est un point d'inflexion de la courbe.

3) Après le point d'inflexion, la fonction est convexe, la croissance du coût de fabrication C s'accélère. Avant le point d'inflexion, la fonction est concave, la croissance du coût de fabrication ralentie.
Ainsi, à partir de 7000 clés produites, la croissance du coût de fabrication s'accélère.

Méthode : Étudier une fonction

Vidéo https://youtu.be/Q4cqUJrTPZo

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.
a) Calculer la dérivée de la fonction f.
b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
c) Tracer la courbe représentative de la fonction f en s'aidant de la calculatrice.
d) Déterminer une valeur approchée de l'abscisse du point d'inflexion à la courbe.
e) Démontrer que $f''(x) = \left(\frac{x}{4} - 1\right)e^{-\frac{x}{2}}$.
f) En déduire l'abscisse du point d'inflexion.

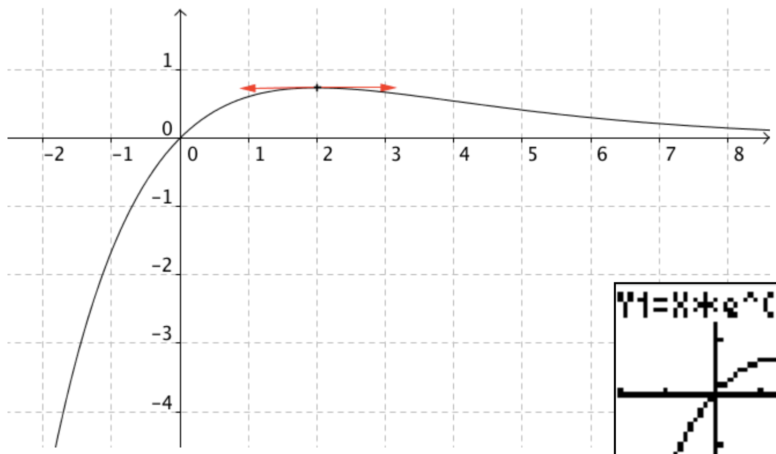
a) $f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} + x \times \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} = \left(1 - \frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$.
b) Comme $e^{-\frac{x}{2}} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \frac{x}{2}$.
f est donc croissante sur l'intervalle $]-\infty\,; 2]$ et décroissante sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$.

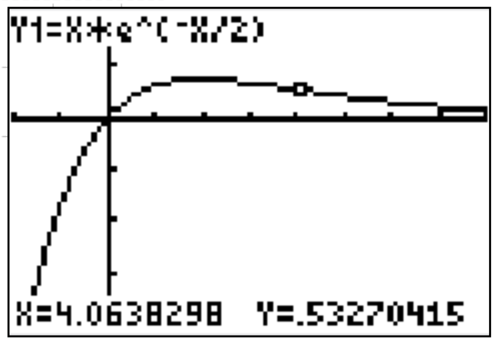
On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{2}{e}$	↘	

$f(2) = 2e^{-\frac{2}{2}} = 2e^{-1} = \dfrac{2}{e}$

c)





d) Le point d'inflexion semble avoir pour abscisse une valeur proche de 4.

e) $f"(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$

$= -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + \frac{x}{4}e^{-\frac{x}{2}}$

$= -e^{-\frac{x}{2}} + \frac{x}{4}e^{-\frac{x}{2}}$

$= \left(\frac{x}{4} - 1\right)e^{-\frac{x}{2}}.$

f) Comme $e^{-\frac{x}{2}} > 0$, $f"(x)$ est du signe de $\dfrac{x}{4} - 1$.

Donc $f"(x) \geq 0$ pour $\dfrac{x}{4} - 1 \geq 0$ soit $x \geq 4$.

$f"(x) \leq 0$ pour $\dfrac{x}{4} - 1 \leq 0$ soit $x \leq 4$.

Ainsi f' est croissante sur $[4\,;\,+\infty[$ et donc f est convexe sur cet intervalle.
f' est décroissante sur $]-\infty\,;4]$ et donc f est concave sur cet intervalle.
On en déduit que la courbe représentative de f possède un point d'inflexion d'abscisse 4.