

DÉRIVATION

I. Rappels

▶ Vidéos

<https://www.youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCaoY7qihLa2dHc9-rBqVrgWJ>

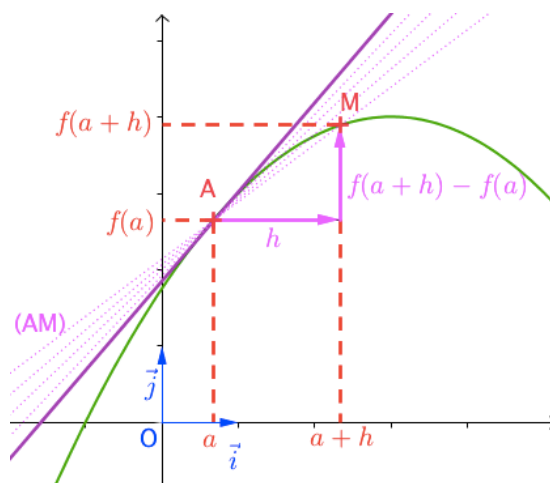
1) Tangente à une courbe

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel a appartenant à I .

L est le nombre dérivé de f en a .

A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative C_f de f .

Définition : La **tangente** à la courbe C_f au point A est la droite passant par A de coefficient directeur le nombre dérivé L .



Propriété : Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Exemple :

On considère la fonction trinôme f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 3x - 1$.

On veut déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.

$$f'(x) = 2x + 3 \text{ donc } f'(2) = 2 \times 2 + 3 = 7$$

$$\text{Or, } f(2) = 2^2 + 3 \times 2 - 1 = 9$$

Donc son équation est de la forme : $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$, soit :

$$y = 7(x - 2) + 9 \text{ soit encore } y = 7x - 5$$

Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est $y = 7x - 5$.

2) Formules de dérivation des fonctions usuelles :

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}	$f'(x) = 0$	\mathbb{R}
$f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}	$f'(x) = a$	\mathbb{R}
$f(x) = x^2$	\mathbb{R}	$f'(x) = 2x$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n$ $n \geq 1$ entier	\mathbb{R}	$f'(x) = nx^{n-1}$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	\mathbb{R}	$f'(x) = e^x$	\mathbb{R}
$f(x) = e^{kx}, k \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}	$f'(x) = ke^{kx}$	\mathbb{R}

Exemples :

a) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{6x}$ alors f est dérivable sur \mathbb{R} et on a pour tout x de \mathbb{R} , $f'(x) = 6e^{6x}$.

b) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x^5}$ alors f est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et on a pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = -\frac{5}{x^6}$.

3) Formules d'opération sur les fonctions dérivées :

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

$u + v$ est dérivable sur I	$(u + v)' = u' + v'$
ku est dérivable sur I , où k est une constante	$(ku)' = ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I , où u ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I , où v ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemples :

a) $f(x) = (2x^2 - 5x)(3x - 2)$

$$f(x) = u(x)v(x) \text{ avec } u(x) = 2x^2 - 5x \rightarrow u'(x) = 4x - 5$$

$$v(x) = 3x - 2 \rightarrow v'(x) = 3$$

$$\text{Donc : } f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (4x - 5)(3x - 2) + (2x^2 - 5x) \times 3$$

$$\begin{aligned}
 &= 12x^2 - 8x - 15x + 10 + 6x^2 - 15x \\
 &= 18x^2 - 38x + 10
 \end{aligned}$$

$$b) g(x) = \frac{6x-5}{x^3-2x^2-1}$$

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \frac{u(x)}{v(x)} \text{ avec } u(x) = 6x - 5 \rightarrow u'(x) = 6 \\
 &\quad v(x) = x^3 - 2x^2 - 1 \rightarrow v'(x) = 3x^2 - 4x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc : } g'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\
 &= \frac{6(x^3 - 2x^2 - 1) - (6x - 5)(3x^2 - 4x)}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2} \\
 &= \frac{6x^3 - 12x^2 - 6 - 18x^3 + 24x^2 + 15x^2 - 20x}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2} \\
 &= \frac{-12x^3 + 27x^2 - 20x - 6}{(x^3 - 2x^2 - 1)^2}
 \end{aligned}$$

4) Application à l'étude des variations d'une fonction

Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I .

- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I .

- Admis -

Exemple :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 4x$.

Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 2x - 4$.

Résolvons l'équation : $f'(x) \leq 0$

$$2x - 4 \leq 0$$

$$2x \leq 4$$

$$x \leq 2$$

La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$.

De même, on obtient que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$.

II. Dérivée d'une fonction composée

Fonction	Dérivée
$f(ax + b)$	$af'(ax + b)$
u^2	$2u'u$
e^u	$u'e^u$

Méthode : Déterminer la dérivée d'une fonction composée

▶ Vidéo https://youtu.be/5G4Aa8gKH_o

Déterminer la dérivée des fonctions définies par :

a) $g(x) = (2x^2 + 3x - 3)^2$ b) $h(x) = 2e^{\frac{1}{x}}$

a) On pose : $g(x) = (u(x))^2$ avec $u(x) = 2x^2 + 3x - 3 \rightarrow u'(x) = 4x + 3$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } g'(x) &= 2u'(x)u(x) \\ &= 2(4x + 3)(2x^2 + 3x - 3) \end{aligned}$$

b) On pose : $h(x) = 2e^{u(x)}$ avec $u(x) = \frac{1}{x} \rightarrow u'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } g'(x) &= 2u'(x)e^{u(x)} \\ &= 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} \\ &= -\frac{2}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Méthode : Étudier une fonction composée

▶ Vidéo <https://youtu.be/Vx0H1DV3Yqc>

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

- a) Calculer la dérivée de la fonction f .
b) En déduire les variations de la fonction f .

a) On a :

$$f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} + x \times \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} = \left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\text{En effet : } \left(e^{-\frac{x}{2}}\right)' = \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$$

b) Comme $e^{-\frac{x}{2}} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \frac{x}{2}$.

f' est donc positive sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$ et négative sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$.

f est donc croissante sur l'intervalle $]-\infty ; 2]$ et décroissante sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales