DÉRIVATION

Partie 1 : Rappels sur la dérivation

Playlist https://www.youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCaoY7qihLa2dHc9-rBgVrgWJ

Formules de dérivation :

Fonction	**Dérivée**
$a,\ a \in \mathbb{R}$	0
$ax,\ a \in \mathbb{R}$	a
x^2	$2x$
x^n $n \geq 1$ entier	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$ $n \geq 1$ entier	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$e^{kx},\ k \in \mathbb{R}$	ke^{kx}

Fonction	**Dérivée**
$u+v$	$u'+v'$
$ku,\ \ k \in \mathbb{R}$	ku'
uv	$u'v+uv'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Exemples :

a) $f(x) = (2x^2-5x)(3x-2)$

$f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = 2x^2-5x \rightarrow u'(x) = 4x-5$

$v(x) = 3x-2 \rightarrow v'(x) = 3$

Donc : $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (4x-5)(3x-2) + (2x^2-5x) \times 3$

$= 12x^2-8x-15x+10+6x^2-15x$

$= 18x^2-38x+10$

b) $g(x) = \frac{6x-5}{x^3-2x^2-1}$

$g(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 6x-5 \rightarrow u'(x) = 6$

$v(x) = x^3-2x^2-1 \rightarrow v'(x) = 3x^2-4x$

Donc : $g'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

$= \frac{6(x^3-2x^2-1)-(6x-5)(3x^2-4x)}{(x^3-2x^2-1)^2}$

$= \frac{6x^3-12x^2-6-18x^3+24x^2+15x^2-20x}{(x^3-2x^2-1)^2}$

$$= \frac{-12x^3+27x^2-20x-6}{(x^3-2x^2-1)^2}$$

Propriété : Une équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Exemple :
On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 1$.
On veut déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.
$f'(x) = 2x + 3$ donc $f'(2) = 2 \times 2 + 3 = 7$
Or, $f(2) = 2^2 + 3 \times 2 - 1 = 9$
Donc son équation est de la forme : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$, soit :
$y = 7(x-2) + 9$ soit encore $y = 7x - 5$
Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est $y = 7x - 5$.

Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.
- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I.

Exemple :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x$.
Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 2x - 4$.
Résolvons l'équation : $f'(x) \leq 0$
$2x - 4 \leq 0$
$2x \leq 4$
$x \leq 2$
La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,; 2]$.
De même, on obtient que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[2\,; +\infty[$.

Partie 2 : Dérivée d'une fonction composée

Fonction	Dérivée
$f(ax+b)$	$af'(ax+b)$
u^2	$2u'u$
e^u	$u'e^u$

Méthode : Déterminer la dérivée d'une fonction composée

Vidéo https://youtu.be/5G4Aa8gKH_o

Déterminer la dérivée des fonctions définies par :
a) $g(x) = (2x^2 + 3x - 3)^2$ b) $h(x) = 2e^{\frac{1}{x}}$

Correction

a) On pose : $g(x) = (u(x))^2$ avec $u(x) = 2x^2 + 3x - 3 \rightarrow u'(x) = 4x + 3$

Donc : $g'(x) = 2u'(x)u(x)$

$= 2(4x + 3)(2x^2 + 3x - 3)$

b) On pose : $h(x) = 2e^{u(x)}$ avec $u(x) = \frac{1}{x} \rightarrow u'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Donc : $g'(x) = 2u'(x)e^{u(x)}$

$= 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}$

$= -\frac{2}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

Méthode : Étudier une fonction composée

Vidéo https://youtu.be/Vx0H1DV3Yqc

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

a) Calculer la dérivée de la fonction f.

b) En déduire les variations de la fonction f.

Correction

a) On a :

$f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} + x \times \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} = \left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$

En effet : $\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)' = \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$

b) Comme $e^{-\frac{x}{2}} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \frac{x}{2}$.

f' est donc positive sur l'intervalle $]-\infty\,;2]$ et négative sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$.

f est donc croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;2]$ et décroissante sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$.