

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I. Notion d'équation différentielle

Définition : Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Exemples :

a) L'équation $f'(x) = 5$ peut se noter $y' = 5$ en considérant que y est une fonction inconnue qui dépend de x .

Dans ce cas, une solution de cette équation est $y = 5x$. En effet, $(5x)' = 5$.

On peut également noter l'équation différentielle sous la forme : $\frac{dy}{dx} = 5$.

b) Une solution de l'équation $y' = 2x$ est $y = x^2$.

Pour une équation différentielle, la solution n'est habituellement pas unique.

Par exemple, $y = x^2 + 1$ est une autre solution de l'équation différentielle.

En effet, $(x^2 + 1)' = 2x$.

Méthode : Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

▶ Vidéo <https://youtu.be/LX8PxR-ScfM>

Prouver que la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = 3x^2 + \ln x$ est solution de l'équation différentielle $y' = 6x + \frac{1}{x}$.

Pour tout x de sur $]0 ; +\infty[$, on a :

$$g'(x) = 3 \times 2x + \frac{1}{x} = 6x + \frac{1}{x}$$

Donc, g est bien solution de l'équation $y' = 6x + \frac{1}{x}$.

II. Équations différentielles du type $y' = ay$

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay$

▶ Vidéo <https://youtu.be/YJNHTq85tJA>

On considère l'équation différentielle $3y' + 5y = 0$.

1) a) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation.

b) Représenter à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, quelques courbes des fonctions solutions.

2) Déterminer l'unique solution telle que $y(1) = 2$.

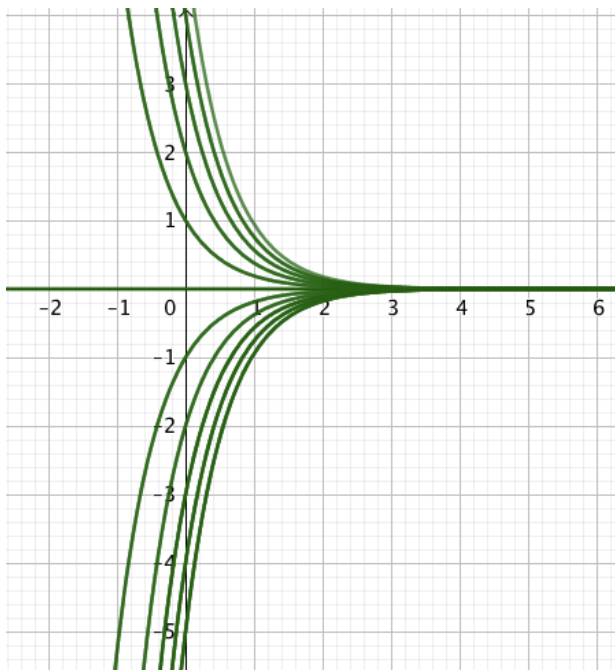
1) a) $3y' + 5y = 0$

$$3y' = -5y$$

$$y' = -\frac{5}{3}y$$

Les solutions sont de la forme : $y_C(x) = Ce^{-\frac{5}{3}x}$, $C \in \mathbb{R}$.

b) Pour différentes valeurs de C , on obtient :



2) $y(1) = 2$

Donc : $Ce^{-\frac{5}{3} \times 1} = 2$

$$Ce^{-\frac{5}{3}} = 2$$

$$C = 2e^{\frac{5}{3}}$$

Et donc : $y(x) = 2e^{\frac{5}{3}} e^{-\frac{5}{3}x} = 2e^{\frac{5}{3} - \frac{5}{3}x} = 2e^{\frac{5}{3}(1-x)}$

Propriété : Si f et g sont deux solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, alors $f + g$ et kf , $k \in \mathbb{R}$, sont également solutions de l'équation différentielle.

Démonstrations :

- $(f + g)' = f' + g' = af + ag = a(f + g)$

- $(kf)' = kf' = k \times af = a(kf)$

III. Équations différentielles du type $y' = ay + b$

Propriété : La fonction $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \neq 0$). Cette solution est appelée **solution particulière constante**.

Démonstration :

On pose : $g(x) = -\frac{b}{a}$. Alors $g'(x) = 0$.

Or : $ag(x) + b = a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0 = g'(x)$.

Donc : $g'(x) = ag(x) + b$.

g est donc solution de l'équation $y' = ay + b$.

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (a et b deux réels, a non nul) sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto u(x) + v(x)$$

où u est la solution particulière constante de l'équation $y' = ay + b$

et v est une solution quelconque de l'équation $y' = ay$.

Remarque : L'équation $y' = ay + b$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Corollaire : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$

▶ Vidéo https://youtu.be/F_LQLZ8rUhg

▶ Vidéo <https://youtu.be/CFZr44vny3w>

On considère l'équation différentielle $2y' - y = 3$.

1) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation.

2) Déterminer l'unique solution telle que $y(0) = -1$.

$$\begin{aligned} 1) \quad 2y' - y &= 3 \\ 2y' &= y + 3 \\ y' &= \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Les solutions sont de la forme : $y_C(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} - \frac{3}{1}$, $C \in \mathbb{R}$.

Soit : $y_C(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} - 3$, $C \in \mathbb{R}$

$$2) \quad y(0) = -1$$

$$\text{Donc : } Ce^{\frac{1}{2} \times 0} - 3 = -1$$

$$C - 3 = -1$$

$$C = 2$$

Et donc : $y(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 3$

IV. Équations différentielles du type $y'' + \omega^2 y = 0$

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y'' + \omega^2 y = 0$

▣ Vidéo <https://youtu.be/klU6n691j7I>

Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 9y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

Propriété (non exigible) :

Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$, où $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$.

$y'' + 9y = 0$ s'écrit $y'' + 3^2 y = 0$.

Les solutions sont alors de la forme :

$$y_{C_1 C_2}(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$$

- Or, $y(0) = 1$ donc : $C_1 \times 1 + C_2 \times 0 = 1$ soit $C_1 = 1$.

- Et, $y'(0) = 2$.

$$y'_{C_1 C_2}(x) = -3C_1 \sin(3x) + 3C_2 \cos(3x)$$

Donc : $-3C_1 \times 0 + 3C_2 \times 1 = 2$ soit $C_2 = \frac{2}{3}$.

On en déduit la solution de l'équation : $y(x) = \cos(3x) + \frac{2}{3} \sin(3x)$.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales