VECTEURS, DROITES

ET PLANS DE L'ESPACE

 **Le cours sur les vecteurs, droites et plans de l’espace :** [**https://youtu.be/EoT48VtnUJ4**](https://youtu.be/EoT48VtnUJ4)

 **Le cours sur les positions dans l’espace :** [**https://youtu.be/aostYZK5jkE**](https://youtu.be/aostYZK5jkE)

**Partie 1 : Vecteurs de l’espace**

1) Notion de vecteur dans l'espace

Définition : Un **vecteur de l'espace** est défini par une direction de l'espace, un sens et une norme (longueur).

Propriété :

Dire que le point est l’image du point par la **translation** de vecteur revient à dire que : .

Remarques :

- Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane : somme, produit par un réel, relation de Chasles, colinéarité, …

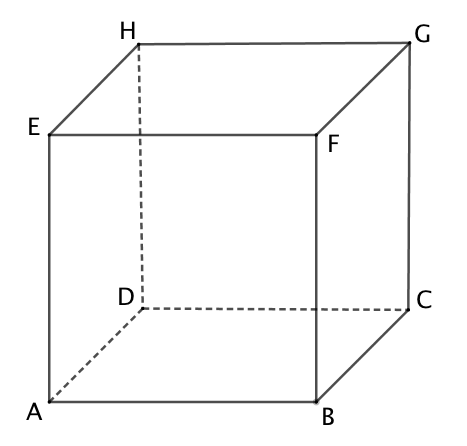
- Les translations gardent les mêmes propriétés qu'en géométrie plane :

conservation du parallélisme, de l’orthogonalité, du milieu, …

2) Combinaisons linéaires de vecteurs de l’espace

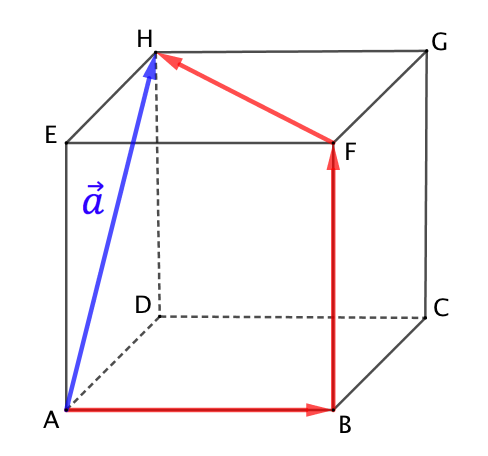
Définition : Soit , et trois vecteurs de l’espace.

Tout vecteur de la forme , avec , et réels, est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs , et .

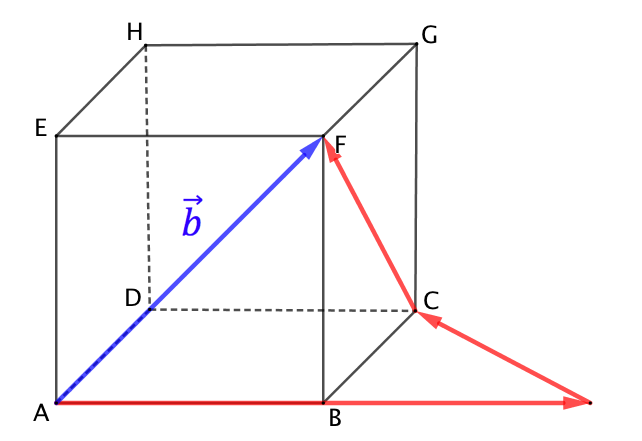
Méthode : Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés

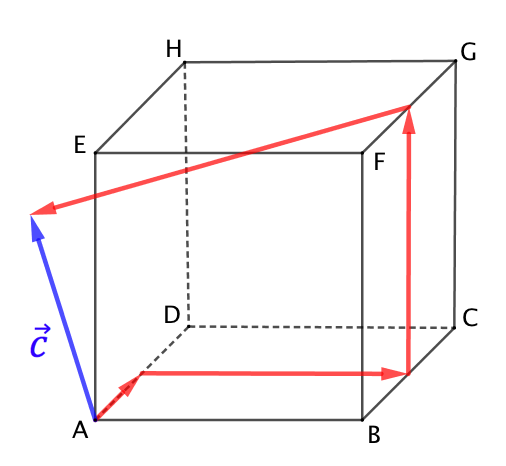
 **Vidéo** [**https://youtu.be/Z83z54pkGqA**](https://youtu.be/Z83z54pkGqA)

A l’aide du cube ci-contre, représenter les vecteurs , et donnés par :

**Correction**

A l’aide du cube, on construit un chemin d’origine et formé des vecteurs (soit ) et .

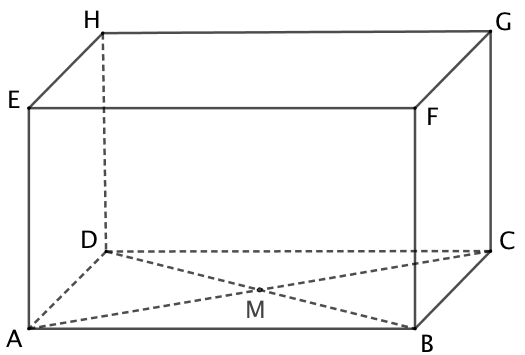




Méthode : Exprimer un vecteur comme combinaisons linéaires de vecteurs

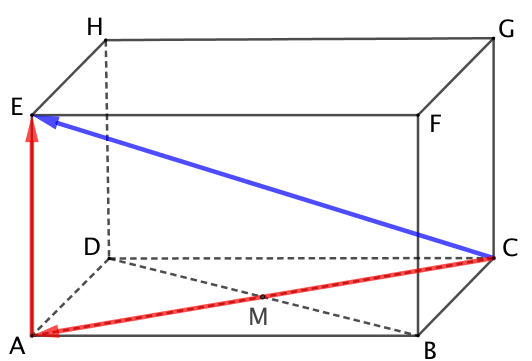
 **Vidéo** [**https://youtu.be/l4FeV0-otP4**](https://youtu.be/l4FeV0-otP4)

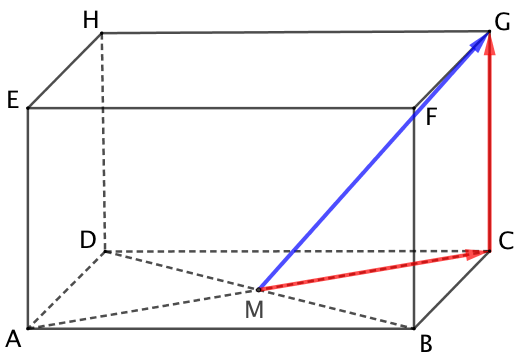
Dans le parallélépipède ci-dessous, est le centre du rectangle .

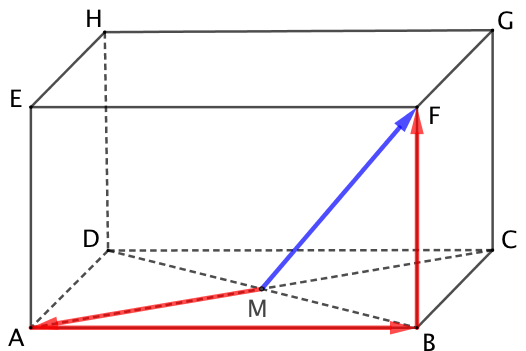
Exprimer les vecteurs et comme combinaisons linéaires des vecteurs , et .

**Correction**

* On commence par construire un chemin d’origine et d’extrémité à l’aide des vecteurs , ou ou des vecteurs qui leurs sont colinéaires.







**Partie 2 : Droites et plans de l’espace**

1) Direction d’une droite de l’espace

Définition : On appelle **vecteur directeur** de tout vecteur non nul qui possède la même direction que la droite .

Propriété : Soit une droite passant par un point et de vecteur directeur .

Un point appartient à la droite si et seulement si les vecteurs et sont colinéaires.

Propriété : Deux droites de l'espace de vecteurs directeurs  et  sont parallèles si et seulement si les vecteurs  et  sont colinéaires.

2) Direction d’un plan de l’espace

Propriété :

Deux vecteurs non nuls et non colinéaires déterminent la direction d’un plan.

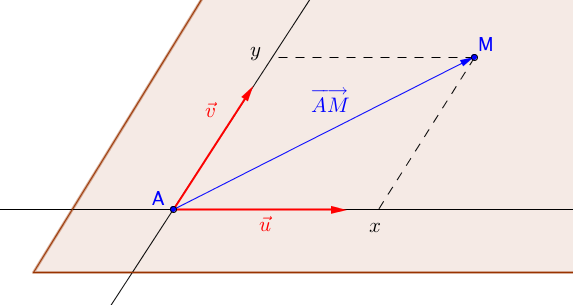
Une image contenant ligne, diagramme, pente, Tracé

Description générée automatiquement

Propriété :

Soit un plan passant par un point et dirigé par deux vecteurs  et  non colinéaires.

Un point appartient au plan si et seulement si , avec et .



Démonstration :

- Soit deux points et tel que   et .

 et  ne sont pas colinéaires donc est un repère du plan (). Dans ce repère, tout point de coordonnées est tel que .

- Réciproquement, soit un point de l'espace tel que .

Soit le point du plan () de coordonnées dans le repère .

Alors et donc .

et sont confondus donc appartient à ().

Remarque :

Un plan est donc totalement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires.

Propriété : Deux plans déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

Démonstration :

Soit deux plan et de repères respectifs et .

- Si et sont confondus, la démonstration est triviale.

- Dans la suite et ne sont pas confondus.

Supposons que et possède un point en commun.

Alors dans , on a : , où sont les coordonnées de dans .

Et dans , on a : , où sont les coordonnées de dans .

Donc donc appartient à .

Donc le repère est un repère de et donc et sont confondus ce qui est contraire à l'hypothèse de départ.

et n'ont aucun point en commun et sont donc parallèles.

Conséquence : Pour démontrer que deux plans sont parallèles, il suffit de montrer que deux vecteurs non colinéaires de l’un des plans sont respectivement colinéaires à deux vecteurs non colinéaires de l’autre.

Une image contenant triangle, ligne

Description générée automatiquementMéthode : Démontrer que deux plans sont parallèles

 **Vidéo** [**https://youtu.be/6B1liGkQL8E**](https://youtu.be/6B1liGkQL8E)

est une pyramide.

, et sont les milieux respectifs de , et .

Démontrer que les plans et sont parallèles.

**Correction**

Deux plans sont parallèles, si deux vecteurs non colinéaires de l’un sont respectivement colinéaires à deux vecteurs non colinéaires de l’autre.

● Démontrer que et sont colinéaires :

Donc et sont colinéaires.

● Dans le triangle , on démontre de même que et sont colinéaires.

● Deux vecteurs non colinéaires du plan , et , sont respectivement colinéaires à deux vecteurs non colinéaires du plan , et , donc les plans et sont parallèles.

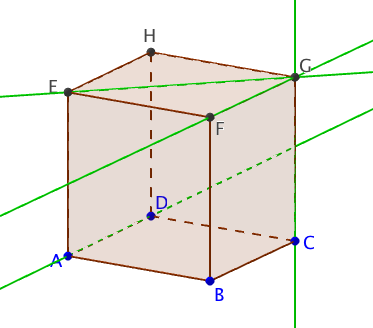
**Partie 3 : Positions relatives de droites et de plans de l’espace**

1) Positions relatives de deux droites

Propriété : Deux droites de l'espace sont soit coplanaires (dans un même plan) soit non coplanaires.

|  |  |
| --- | --- |
| **et**  **sont coplanaires** | |
| et sont  sécantes | Capture d’écran 2012-05-30 à 13 |
| et sont parallèles | Capture d’écran 2012-05-30 à 13  et sont strictement parallèles |
| Capture d’écran 2012-05-30 à 13  et sont confondus |

|  |
| --- |
| **et sont non coplanaires** |
| Capture d’écran 2012-05-30 à 13 |



Exemple :

est un cube.

- Les droites et appartiennent au même plan et sont sécantes en .

- Les droites et appartiennent au même plan et sont parallèles.

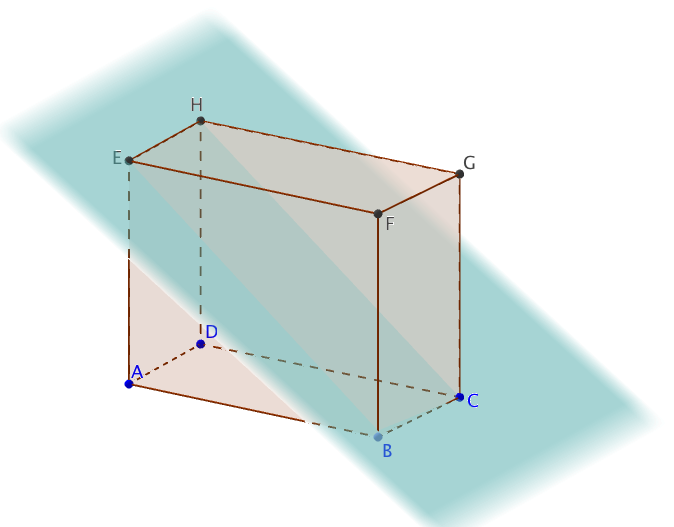
- Les droites et sont non coplanaires.

2) Positions relatives de deux plans

Propriété : Deux plans de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

|  |
| --- |
| **et sont sécants** |
| Capture d’écran 2012-05-30 à 13  et sont sécants  suivant la droite *d* |

|  |
| --- |
| **et**  **sont parallèles** |
| *Capture d’écran 2012-05-30 à 13*  et sont  strictement parallèles |
| *Capture d’écran 2012-05-30 à 13*  et sont confondus |



Exemple :

est un parallélépipède rectangle.

- Les plans et sont sécants suivant la droite .

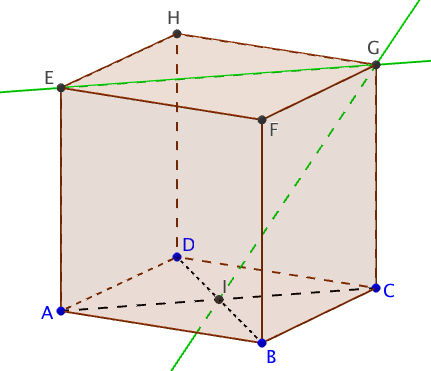
- Les plans et sont parallèles

3) Positions relatives d'une droite et d'un plan

Propriété : Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

|  |
| --- |
| **et sont sécants** |
| Capture d’écran 2012-05-30 à 13  et sont sécants en un point *I* |

|  |
| --- |
| **et**  **sont parallèles** |
| Capture d’écran 2012-05-30 à 13  est incluse dans |
| *Capture d’écran 2012-05-30 à 13*  et sont strictement parallèles |

Exemple :

est un cube.

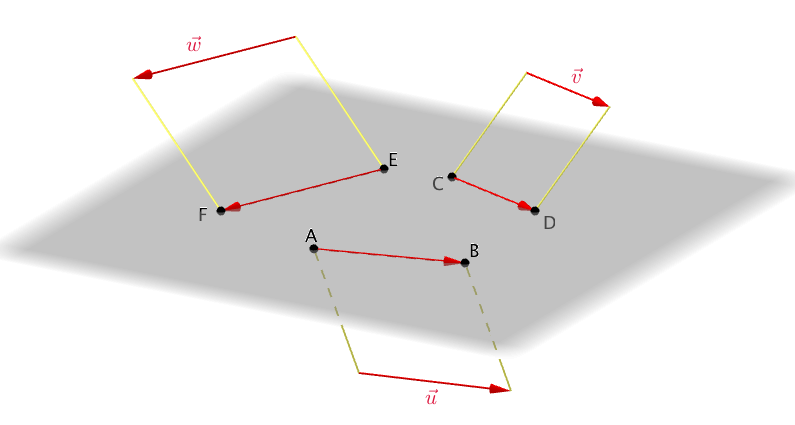
- La droite et le plan sont sécants en I.

- La droite est incluse dans le plan .

- La droite et le plan sont parallèles.

**Partie 4 : Bases et repères de l’espace**

1) Vecteurs coplanaires et bases de l’espace

Définition : Trois vecteurs sont **coplanaires** s'ils possèdent des représentants appartenant à un même plan.

Propriété : Trois vecteurs , et de l’espace sont coplanaires, s’il existe un couple de réels tel que .

Propriété : Soit , et trois vecteurs non coplanaires.

Pour tout vecteur , il existe un unique triplet tel que .

Démonstration :

- Existence : Soit un représentant de .

Soit le plan de repère .

Si appartient à alors se décompose suivant les vecteurs et .

Supposons que n'appartient pas à *.*

Soit la droite passant par de vecteur directeur .

Comme n'est pas colinéaire avec et , la droite coupe le plan en un point .

On peut écrire .

appartient au plan donc il existe un couple tel que .

est colinéaire avec donc il existe un réel tel que .

Il existe donc un triplet tel que .

- Unicité : On suppose que l'on ait les deux écritures distinctes :

Alors.

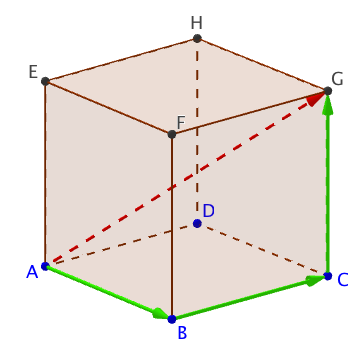
Supposons que l'une au moins des trois différences n'est pas nulle, par exemple : .

Donc et dans ce cas, les vecteurs , et seraient coplanaires. Ce qui est exclu.

Les trois différences , et sont donc nulles.

Définition : Soit , et trois vecteurs non coplanaires de l’espace.

On appelle **base de l'espace** le triplet .

Méthode : Reconnaitre une base de l’espace

 **Vidéo** [**https://youtu.be/5a9pE6XQna4**](https://youtu.be/5a9pE6XQna4)

est un cube.

a) Reconnaître une base de l’espace.

b) Décomposer le vecteurs dans cette base.

**Correction**

a) Les vecteurs , et sont non

coplanaires donc forment une base de l’espace.

b) Le vecteurs se décompose dans la base

en : .

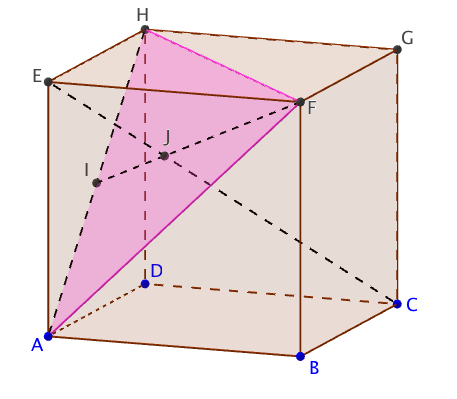
Méthode : Démontrer l'alignement par décomposition de vecteurs dans une base

 **Vidéo** [**https://youtu.be/i4jDkJNtzZg**](https://youtu.be/i4jDkJNtzZg)

est un cube.

Soit le milieu de [] et le point de [] tel que :

Démontrer que les points , et sont alignés.



**Correction**

Pour prouver cet alignement, on va démontrer que les vecteurs et sont colinéaires.

Les vecteurs , et sont non coplanaires donc il est possible de décomposer les vecteurs et dans la base  :

Donc :

Les vecteurs et sont colinéaires et donc les points , et sont alignés.

2) Repère de l'espace

Définition : Soit , et trois vecteurs non coplanaires. est un point de l'espace.

On appelle **repère de l'espace** le quadruplet .

Remarques : - est appelé l'origine du repère.

● La décomposition donne les coordonnées du point .

est l’abscisse de , est l’ordonnée de et est la cote de .

● De même, la décomposition donne les coordonnées du vecteur .

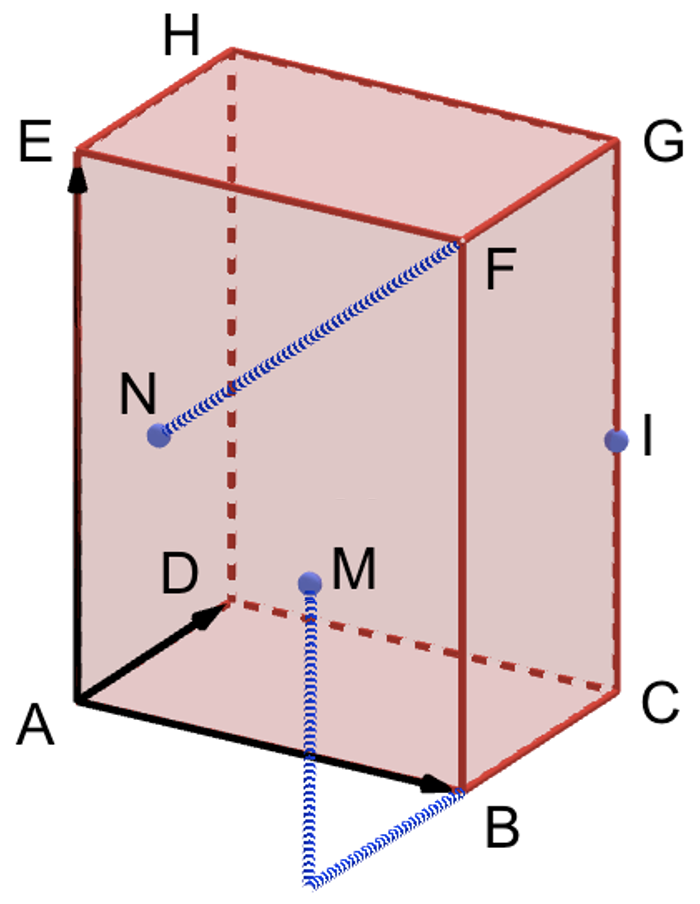
On retrouve dans l’espace, des propriétés déjà connues dans le plan, comme les suivantes :

Propriétés :

Soit deux points et .

● Les coordonnées du vecteur sont :

● Les coordonnées du milieu du segment [] sont :.



Exercice-type 6 : Lire des coordonnées dans l’espace

 **Vidéo** [**https://youtu.be/PZeBXIhNBAk**](https://youtu.be/PZeBXIhNBAk)

Soit un parallélépipède .

est le milieu de [].

Les points et sont définis par :

et

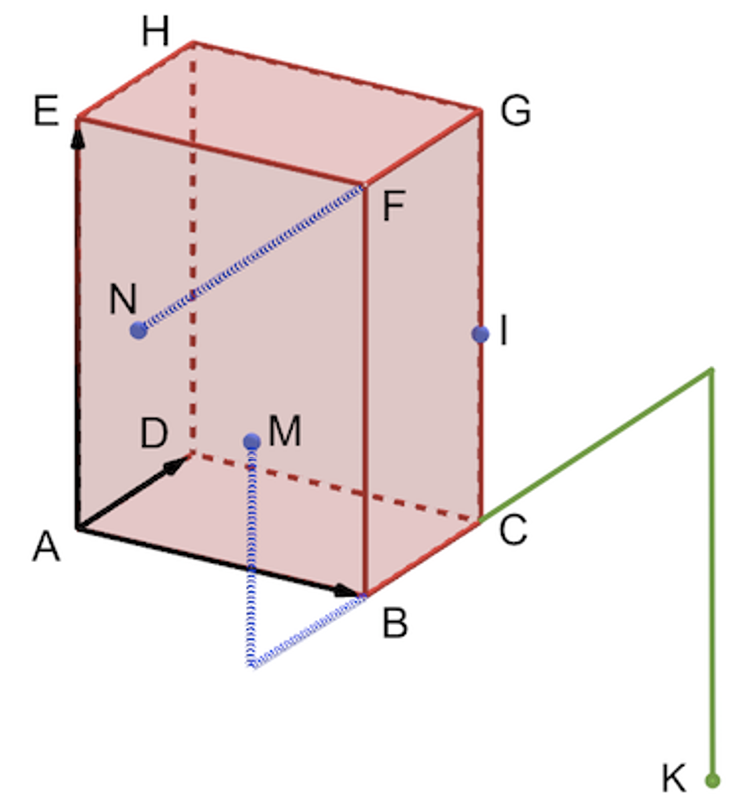
1) Dans le repère , donner les coordonnées de tous les points de la figure.

2) Placer le point

3) Démontrer que les vecteurs et sont égaux.

4) Démontrer que est le milieu du segment [BN].

**Correction**



,

2)

3)

Donc

4) Le milieu du segment a pour coordonnées :

Il s’agit bien des coordonnées de .

Méthode : Démontrer que 4 points sont coplanaires

 **Vidéo** [**https://youtu.be/9baU60ZNioo**](https://youtu.be/9baU60ZNioo)

Dans un repère , on considère les points : et

Démontrer que les points , , et sont coplanaires.

**Correction**

On va démontrer que les trois vecteurs , et de même origine sont coplanaires.

Pour cela, on va démontrer qu’il existe un couple de réels tel que .

● Calculons les coordonnées des vecteurs , et  :

, et

● On cherche et , réels, tels que : .

Soit :

Soit encore :

On fait de même pour toutes coordonnées et on a :

et .

● Soit le système de trois équations à deux inconnues :

On fait la somme membre à membre des deux premières lignes :

On remplace dans la deuxième équation :

et doivent vérifier la troisième équation :

C’est le cas, donc le couple convient.

● On a donc :

Les vecteurs , et sont coplanaires et tous les trois d’origine .

On en déduit que les points , , et sont coplanaires.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)