VECTEURS, DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

Le cours sur les vecteurs, droites et plans de l'espace : https://youtu.be/EoT48VtnUJ4

Le cours sur les positions dans l'espace : https://youtu.be/aostYZK5jkE

Partie 1 : Vecteurs de l'espace

1) Notion de vecteur dans l'espace

Définition : Un **vecteur de l'espace** est défini par une direction de l'espace, un sens et une norme (longueur).

Propriété :
Dire que le point M' est l'image du point M par la **translation** de vecteur $\vec{u}$ revient à dire que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Remarques :
- Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane : somme, produit par un réel, relation de Chasles, colinéarité, …
- Les translations gardent les mêmes propriétés qu'en géométrie plane : conservation du parallélisme, de l'orthogonalité, du milieu, …

2) Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace

Définition : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

Tout vecteur de la forme $a\,\vec{u} + b\,\vec{v} + c\,\vec{w}$, avec a, b et c réels, est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Méthode : Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés

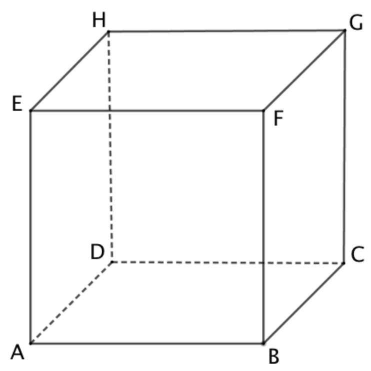
Vidéo https://youtu.be/Z83z54pkGqA

A l'aide du cube ci-contre, représenter les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ donnés par :

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FH}$

$\vec{b} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{FC}$

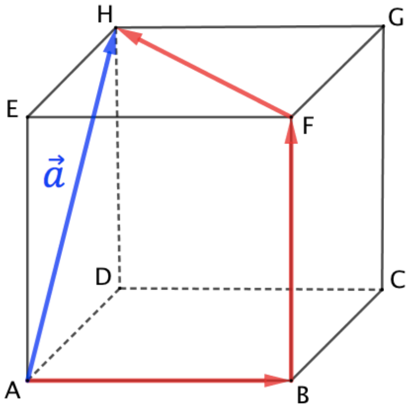
$\vec{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AC}$



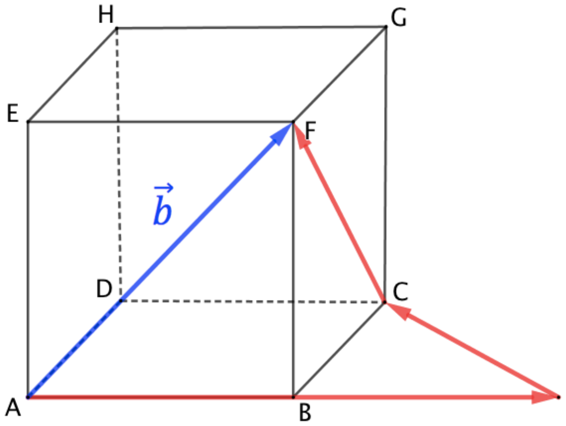
Correction

- $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FH}$

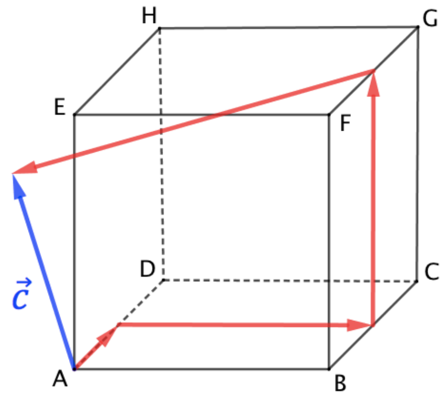
A l'aide du cube, on construit un chemin d'origine A et formé des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CG}$ (soit $\overrightarrow{BF}$) et $\overrightarrow{FH}$.



- $\vec{b} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{FC}$



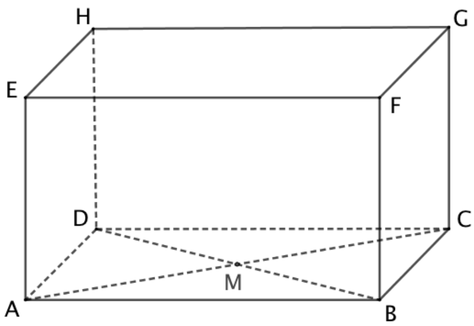
- $\vec{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AC}$



Méthode : Exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs

Vidéo https://youtu.be/l4FeV0-otP4

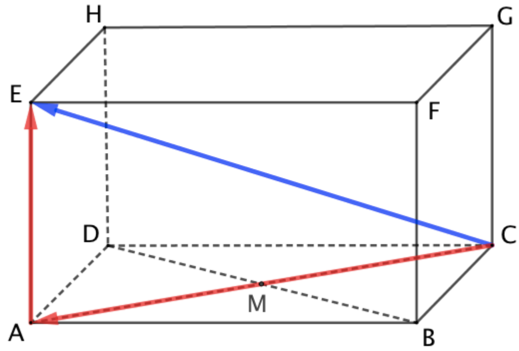
Dans le parallélépipède ci-dessous, M est le centre du rectangle $ABCD$.
Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MF}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.



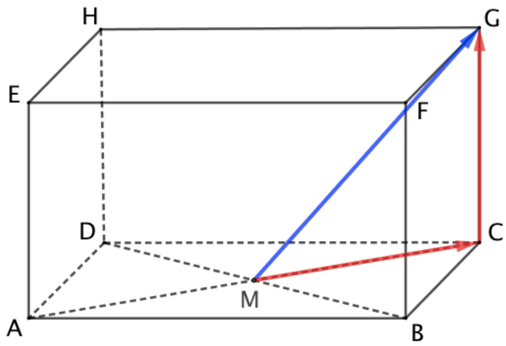
Correction

- On commence par construire un chemin d'origine C et d'extrémité E à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{AE}$ ou des vecteurs qui leurs sont colinéaires.

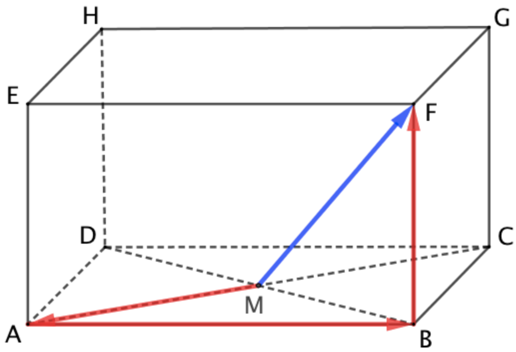
- $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE}$
  $= -2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AE}$



- $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CG}$
  $= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AE}$



- $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$
  $= -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$



Partie 2 : Droites et plans de l'espace

1) Direction d'une droite de l'espace

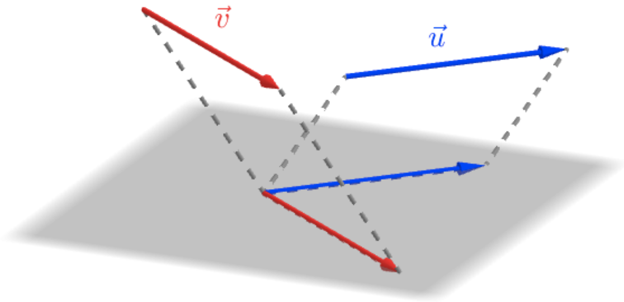
Définition : On appelle **vecteur directeur** de d tout vecteur non nul qui possède la même direction que la droite d.

Propriété : Soit une droite d passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
Un point M appartient à la droite d si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

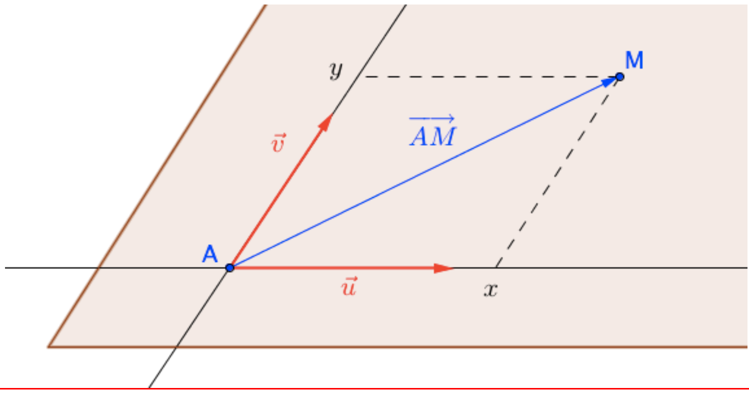
Propriété : Deux droites de l'espace de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2) Direction d'un plan de l'espace

Propriété :
Deux vecteurs non nuls et non colinéaires déterminent la direction d'un plan.



Propriété :
Soit un plan P passant par un point A et dirigé par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
Un point M appartient au plan P si et seulement si $\overrightarrow{AM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.



Démonstration :
- Soit deux points B et C tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ est un repère du plan (ABC). Dans ce repère, tout point M de coordonnées (x, y) est tel que $\overrightarrow{AM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$.

- Réciproquement, soit M un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$.
Soit N le point du plan (ABC) de coordonnées (x, y) dans le repère $(A\,;\vec{u},\vec{v})$.
Alors $\overrightarrow{AN} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$ et donc $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$.
M et N sont confondus donc M appartient à (ABC).

Remarque :
Un plan est donc totalement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires.

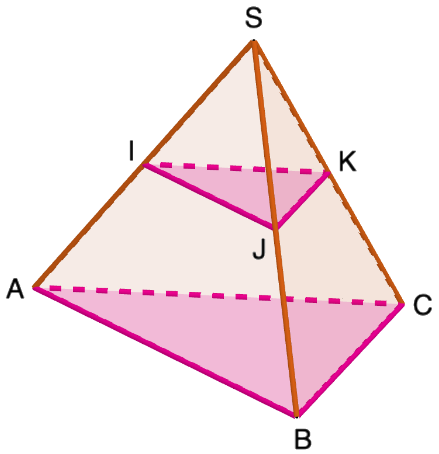
Propriété : Deux plans déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

Démonstration :
Soit deux plan P et P' de repères respectifs $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ et $(B\,;\vec{u},\vec{v})$.
- Si P et P' sont confondus, la démonstration est triviale.
- Dans la suite P et P' ne sont pas confondus.
Supposons que P et P' possède un point M en commun.
Alors dans P, on a : $\overrightarrow{AM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$, où (x, y) sont les coordonnées de M dans P.
Et dans P', on a : $\overrightarrow{BM} = x'\,\vec{u} + y'\,\vec{v}$, où (x', y') sont les coordonnées de M dans P'.
Donc $\overrightarrow{AB} = (x - x')\,\vec{u} + (y - y')\,\vec{v}$ donc B appartient à P.
Donc le repère $(B\,;\vec{u},\vec{v})$ est un repère de P et donc P et P' sont confondus ce qui est contraire à l'hypothèse de départ.
P et P' n'ont aucun point en commun et sont donc parallèles.

Conséquence : Pour démontrer que deux plans sont parallèles, il suffit de montrer que deux vecteurs non colinéaires de l'un des plans sont respectivement colinéaires à deux vecteurs non colinéaires de l'autre.

Méthode : Démontrer que deux plans sont parallèles
Vidéo https://youtu.be/6B1liGkQL8E

$SABC$ est une pyramide.
I, J et K sont les milieux respectifs de $[SA]$, $[SB]$ et $[SC]$.
Démontrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.



Correction
Deux plans sont parallèles, si deux vecteurs non colinéaires de l'un sont respectivement colinéaires à deux vecteurs non colinéaires de l'autre.
● Démontrer que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IS} + \overrightarrow{SJ}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SB}\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB}\right)\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

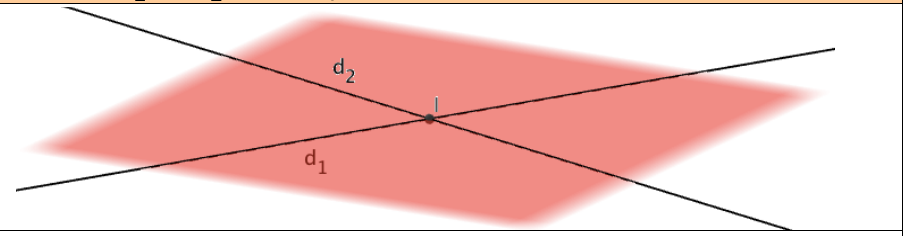
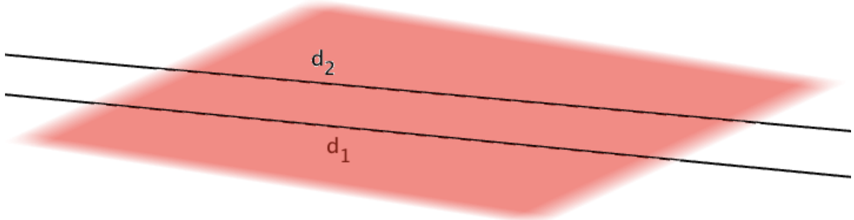
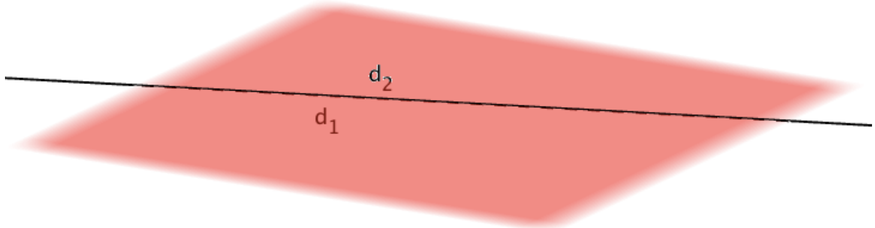
● Dans le triangle SBC, on démontre de même que $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

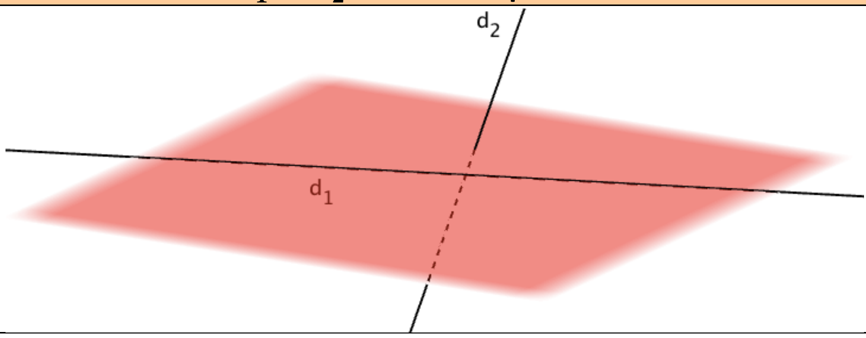
● Deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK), $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$, sont respectivement colinéaires à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, donc les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

Partie 3 : Positions relatives de droites et de plans de l'espace

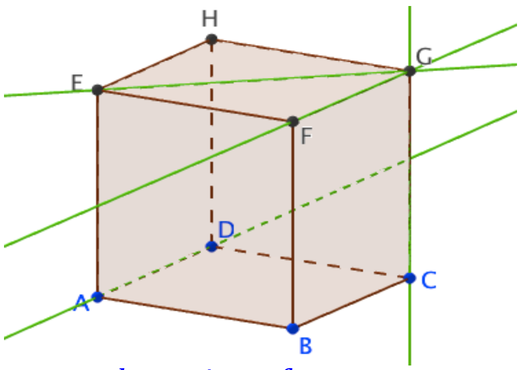
1) Positions relatives de deux droites

Propriété : Deux droites de l'espace sont soit coplanaires (dans un même plan) soit non coplanaires.

d_1 et d_2 sont coplanaires	
d_1 et d_2 sont sécantes	
d_1 et d_2 sont parallèles	 d_1 et d_2 sont strictement parallèles
	 d_1 et d_2 sont confondus

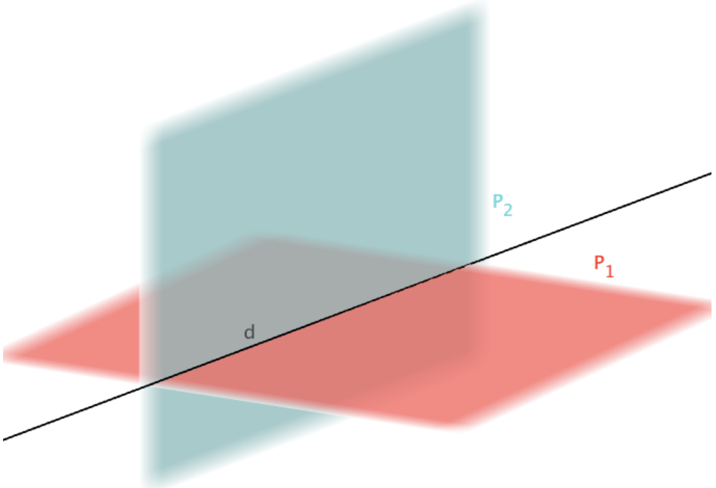
d_1 et d_2 sont non coplanaires


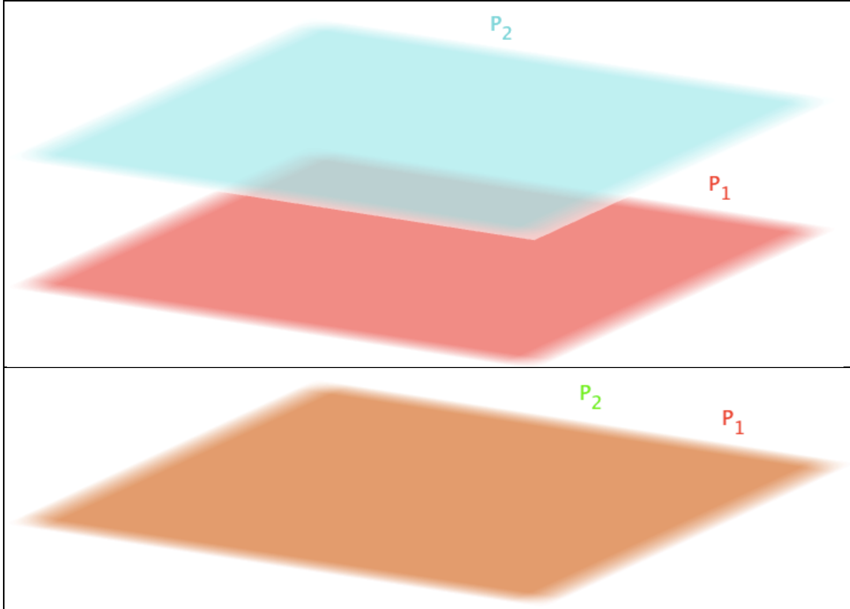
Exemple :
$ABCDEFGH$ est un cube.
- Les droites (EG) et (FG) appartiennent au même plan (EFG) et sont sécantes en G.
- Les droites (AD) et (FG) appartiennent au même plan (ADG) et sont parallèles.
- Les droites (AD) et (CG) sont non coplanaires.



2) Positions relatives de deux plans

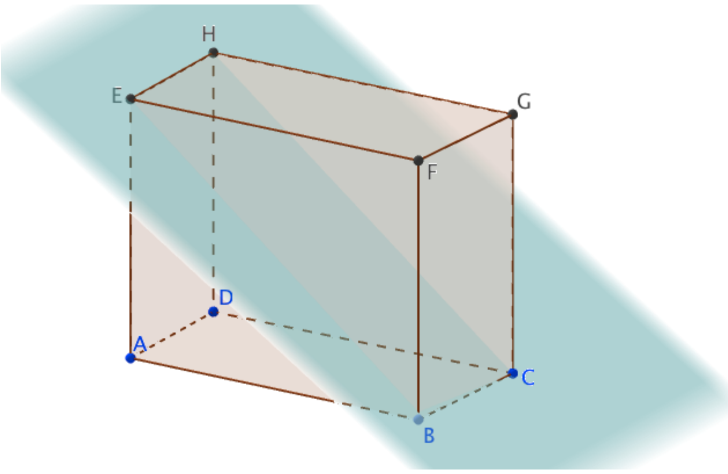
Propriété : Deux plans de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

P_1 et P_2 sont sécants
 P_1 et P_2 sont sécants suivant la droite d

P_1 et P_2 sont parallèles
 P_1 et P_2 sont strictement parallèles
P_1 et P_2 sont confondus

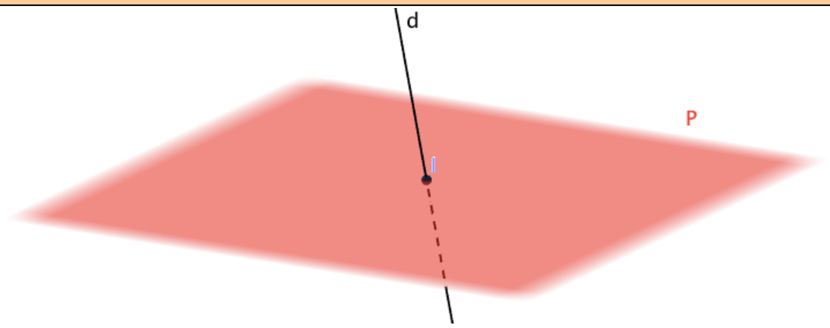
Exemple :

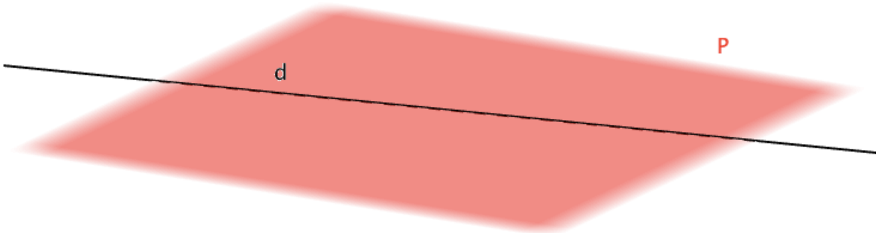
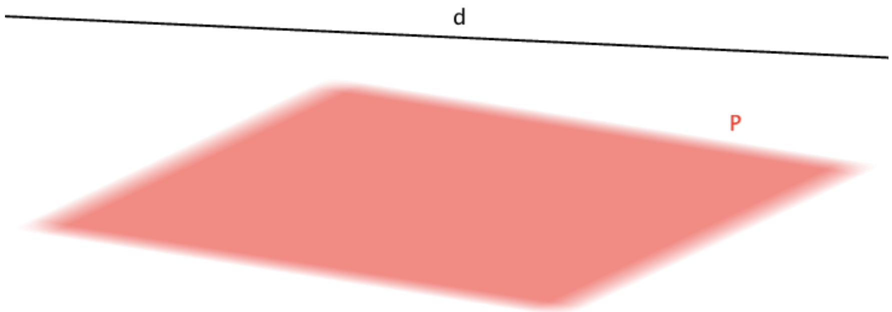
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle.
- Les plans (BCG) et (BCE) sont sécants suivant la droite (BC).
- Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles



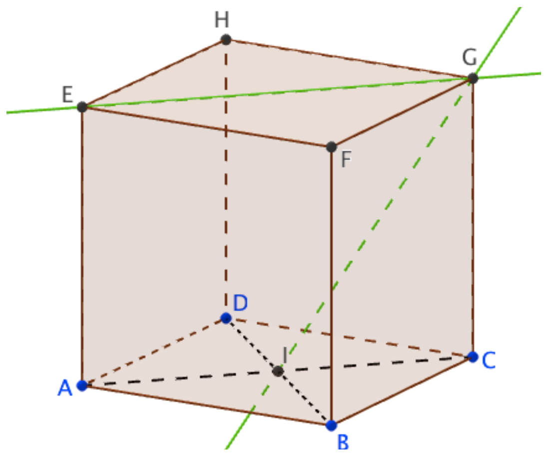
3) Positions relatives d'une droite et d'un plan

Propriété : Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

d et P sont sécants
 d et P sont sécants en un point I

d et P sont parallèles
 d est incluse dans P
 d et P sont strictement parallèles

Exemple :

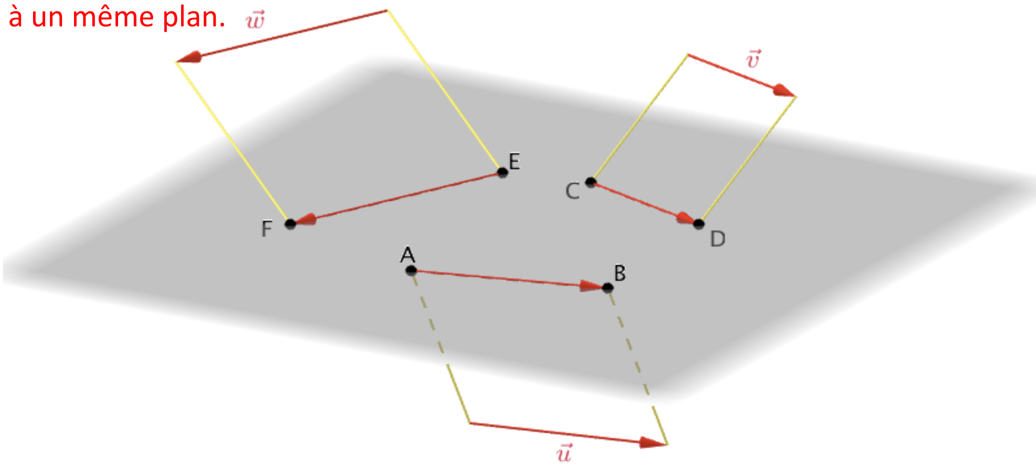


$ABCDEFGH$ est un cube.
- La droite (GI) et le plan (ABC) sont sécants en I.
- La droite (EG) est incluse dans le plan (EFG).
- La droite (EG) et le plan (ABC) sont parallèles.

Partie 4 : Bases et repères de l'espace

1) Vecteurs coplanaires et bases de l'espace

Définition : Trois vecteurs de l'espace sont **coplanaires** s'ils possèdent des représentants appartenant à un même plan.



Propriété : Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont coplanaires, s'il existe un couple de réels $(x\,;y)$ tel que $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$.

Propriété : Soit $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs de l'espace non coplanaires.
Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet $(x\,;y\,;z)$ tel que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

Démonstration :

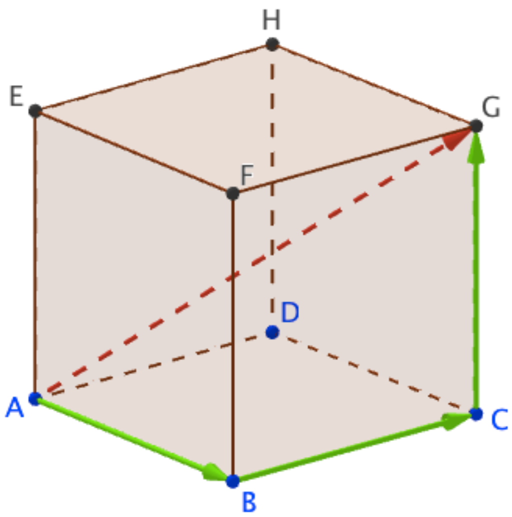
- Existence : Soit $\overrightarrow{AB}$ un représentant de $\vec{u}$.
Soit P le plan de repère $(A\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.
Si B appartient à P alors $\overrightarrow{AB}$ se décompose suivant les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
Supposons que B n'appartient pas à P.
Soit d la droite passant par B de vecteur directeur $\vec{k}$.
Comme $\vec{k}$ n'est pas colinéaire avec $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, la droite d coupe le plan P en un point C.
On peut écrire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.
$\overrightarrow{AC}$ appartient au plan P donc il existe un couple $(x\,;y)$ tel que $\overrightarrow{AC} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.
$\overrightarrow{CB}$ est colinéaire avec $\vec{k}$ donc il existe un réel z tel que $\overrightarrow{CB} = z\vec{k}$.
Il existe donc un triplet $(x\,;y\,;z)$ tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

- Unicité : On suppose que l'on ait les deux écritures distinctes :
$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$
Alors $(x - x')\vec{\imath} + (y - y')\vec{\jmath} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}$.
Supposons que l'une au moins des trois différences n'est pas nulle, par exemple : $z - z' \neq 0$.
Donc $\vec{k} = \frac{x' - x}{z - z'}\,\vec{\imath} + \frac{y' - y}{z - z'}\,\vec{\jmath}$ et dans ce cas, les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ seraient coplanaires. Ce qui est exclu.
Les trois différences $x' - x$, $y' - y$ et $z' - z$ sont donc nulles.

Définition : Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.
On appelle **base de l'espace** le triplet $(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$.

Méthode : Reconnaitre une base de l'espace

Vidéo https://youtu.be/5a9pE6XQna4



$ABCDEFGH$ est un cube.
a) Reconnaître une base de l'espace.
b) Décomposer le vecteurs $\overrightarrow{AG}$ dans cette base.

Correction

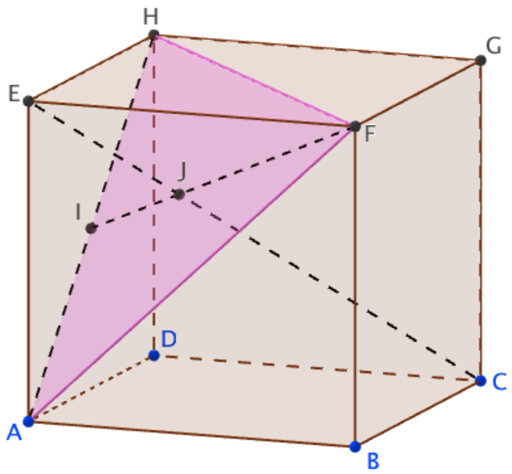
a) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont non coplanaires donc forment une base de l'espace.
b) Le vecteurs $\overrightarrow{AG}$ se décompose dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CG}\right)$ en : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$.

Méthode : Démontrer l'alignement par décomposition de vecteurs dans une base

Vidéo https://youtu.be/i4jDkJNtzZg

$ABCDEFGH$ est un cube.
Soit I le milieu de $[AH]$ et J le point de $[FI]$ tel que :
$\overrightarrow{FJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{FI}$
Démontrer que les points E, J et C sont alignés.

Correction



Pour prouver cet alignement, on va démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont non coplanaires donc il est possible de décomposer les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EJ} &= \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FJ}\\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FI}\\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}\right)\\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}\right)\end{aligned}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}\right)$$
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$$
$$= \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$
$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$$

Donc : $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$

Les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires et donc les points E, J et C sont alignés.

2) Repère de l'espace

Définition : Soit $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace. O est un point de l'espace. On appelle **repère de l'espace** le quadruplet $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$.

Remarques : O est appelé l'origine du repère.

● La décomposition $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ donne les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du point M.

x est l'abscisse de M, y est l'ordonnée de M et z est la cote de M.

● De même, la décomposition $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ donne les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du vecteur $\vec{u}$.

On retrouve dans l'espace, des propriétés déjà connues dans le plan, comme les suivantes :

Propriétés :

Soit deux points de l'espace $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$.

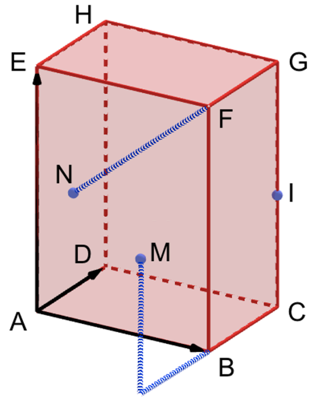
● Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

● Les coordonnées du milieu du segment $[AB]$ sont : $\begin{pmatrix} \frac{x_A+x_B}{2} \\ \frac{y_A+y_B}{2} \\ \frac{z_A+z_B}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice-type 6 : Lire des coordonnées dans l'espace

Vidéo https://youtu.be/PZeBXIhNBAk

Soit un parallélépipède $ABCDEFGH$.
I est le milieu de $[CG]$.
Les points M et N sont définis par :
$\overrightarrow{NF} = 2\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CI}$



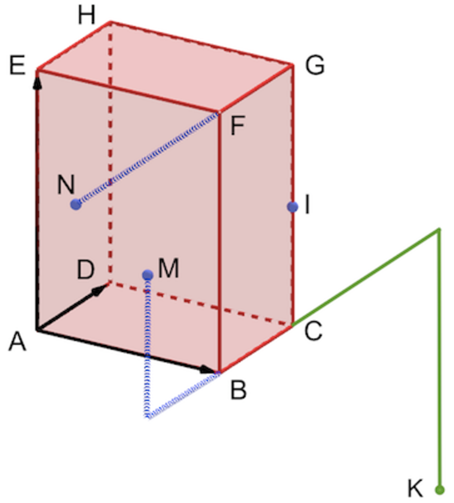
1) Dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$, donner les coordonnées de tous les points de la figure.
2) Placer le point $K(1\,;3\,;\,-1)$.
3) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont égaux.
4) Démontrer que M est le milieu du segment [BN].

Correction

1) $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $H\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$I\begin{pmatrix}1\\1\\0{,}5\end{pmatrix}$, $M\begin{pmatrix}1\\-1\\0{,}5\end{pmatrix}$, $N\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

2)



3) $\overrightarrow{IF}\begin{pmatrix}1-1\\0-1\\1-0{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0{,}5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}1-1\\-2-(-1)\\1-0{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0{,}5\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{IF}=\overrightarrow{MN}$

4) Le milieu du segment $[BN]$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix}\frac{1+1}{2}\\\frac{0+(-2)}{2}\\\frac{0+1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0{,}5\end{pmatrix}$

Il s'agit bien des coordonnées de M.

Méthode : Démontrer que 4 points sont coplanaires

Vidéo https://youtu.be/9baU60ZNioo

Dans un repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère les points : $A\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}6\\-7\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}13\\-16\\5\end{pmatrix}$.

Démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

Correction

On va démontrer que les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$, de même origine A, sont coplanaires.
Pour cela, on va démontrer qu'il existe un couple de réels $(x\,;y)$ tel que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

● Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$:

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-6\\-4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}11\\-15\\1\end{pmatrix}$

● On cherche x et y, réels, tels que : $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.
Soit : $11 = x \times 4 + y \times (-1)$
Soit encore : $4x - y = 11$
On fait de même pour les autres coordonnées et on a :
$-6x + y = -15$ et $-4x - 3y = 1$.

● Soit le système de trois équations à deux inconnues :

$$\begin{cases}4x - y = 11\\-6x + y = -15\\-4x - 3y = 1\end{cases}$$

On fait la somme membre à membre des deux premières lignes :
$4x - y - 6x + y = 11 - 15$
$-2x = -4$
$x = \dfrac{-4}{-2} = 2$

On remplace dans la deuxième équation :
$-6 \times 2 + y = -15$
$y = -15 + 12$
$y = -3$

$x = 2$ et $y = -3$ doivent vérifier la troisième équation :
$-4x - 3y = -4 \times 2 - 3 \times (-3) = -8 + 9 = 1$
C'est le cas, donc le couple $(2\,;\,-3)$ convient.

● On a donc : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires et tous les trois d'origine A.
On en déduit que les points A, B, C et D sont coplanaires.