VECTEURS, DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

I. Vecteurs de l'espace

1) Notion de vecteur dans l'espace

Définition : Un **vecteur de l'espace** est défini par une direction de l'espace, un sens et une norme (longueur).

Remarque :
Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane : relation de Chasles, propriétés en rapport avec la colinéarité, …

2) Translation

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. On appelle **translation** de vecteur $\vec{u}$ la transformation qui au point M associe le point M', tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Remarque :
Les translations gardent les mêmes propriétés qu'en géométrie plane : conservation du parallélisme, de l'orthogonalité, du milieu, …

3) Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace

Définition : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

Tout vecteur de la forme $\alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} + \gamma\,\vec{w}$, avec α, β et γ réels, est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Méthode : Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés

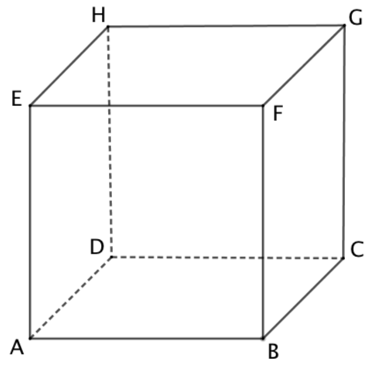
Vidéo https://youtu.be/Z83z54pkGqA

A l'aide du cube ci-contre, représenter les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ donnés par :

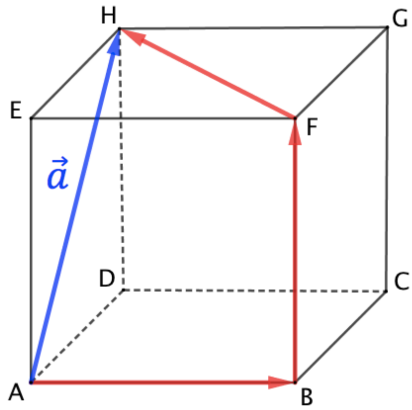
$\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FH}$

$\vec{b} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{FC}$

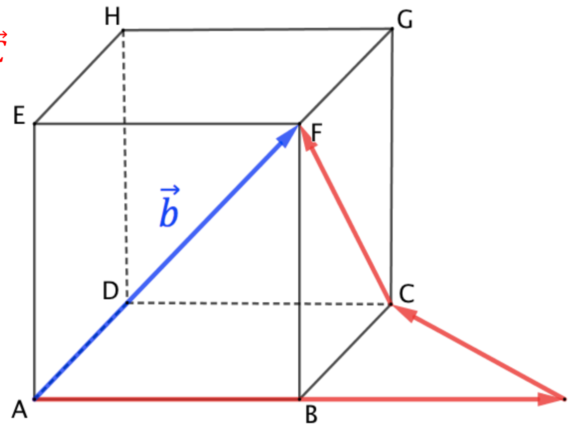
$\vec{c} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AC}$



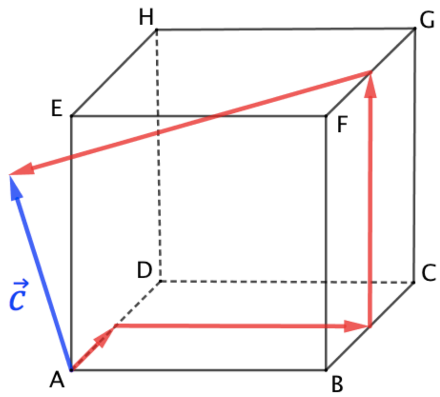
- $\color{blue}{\vec{a}} = \color{red}{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FH}}$
A l'aide du cube, on construit un chemin d'origine A et formé des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CG}$ (soit $\overrightarrow{BF}$) et $\overrightarrow{FH}$.



- $\vec{b} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{FC}$



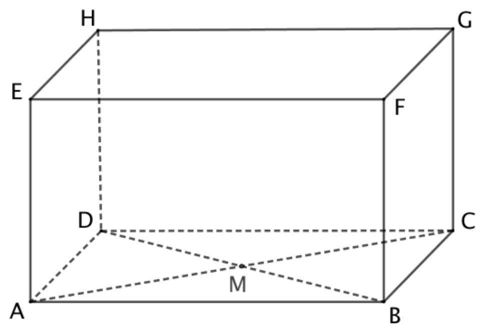
- $\vec{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AC}$



Méthode : Exprimer un vecteur comme combinaisons linéaires de vecteurs

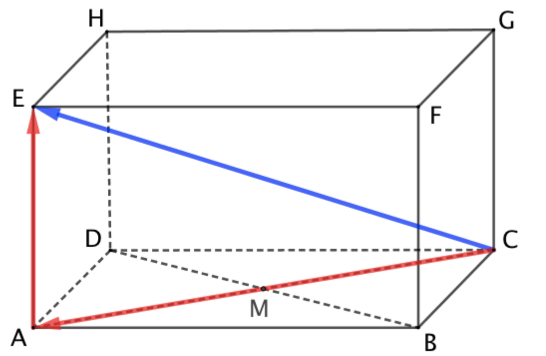
Vidéo https://youtu.be/l4FeV0-otP4

Dans le parallélépipède ci-contre, M est le centre du rectangle $ABCD$.
Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MF}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.

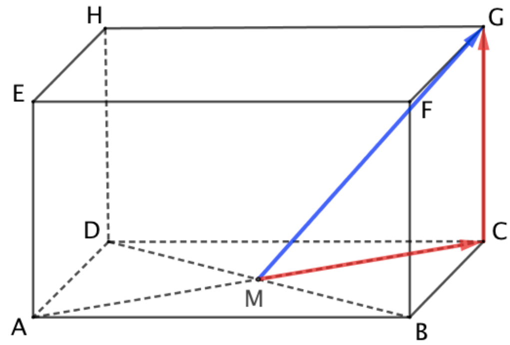


- On commence par construire un chemin d'origine C et d'extrémité E à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{AE}$ ou des vecteurs qui leurs sont colinéaires.

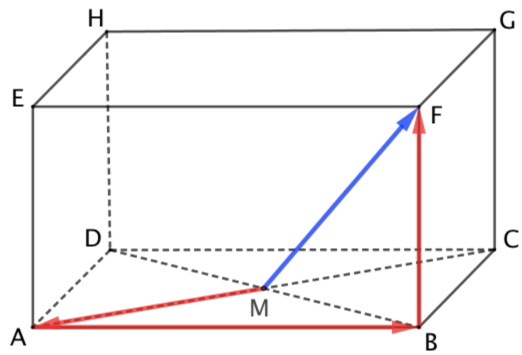
$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE}$
$\quad = -2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AE}$



- $\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CG}$
  $= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AE}$



- $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$
  $= -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$



II. Droites de l'espace

1) Vecteurs colinéaires

Définition : Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** signifie qu'ils ont même direction c'est à dire qu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

2) Vecteur directeur d'une droite

Définition : On appelle **vecteur directeur** de *d* tout vecteur non nul qui possède la même direction que la droite *d*.

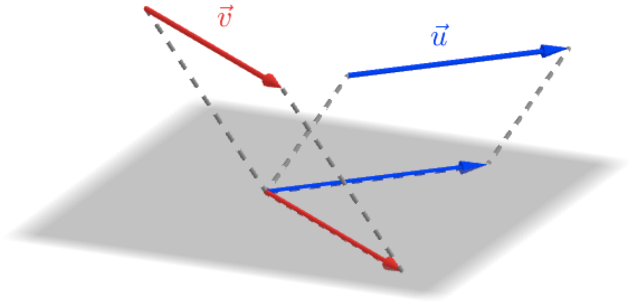
Propriété : Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace. La **droite** *d* passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Propriété : Deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

III. Plans de l'espace

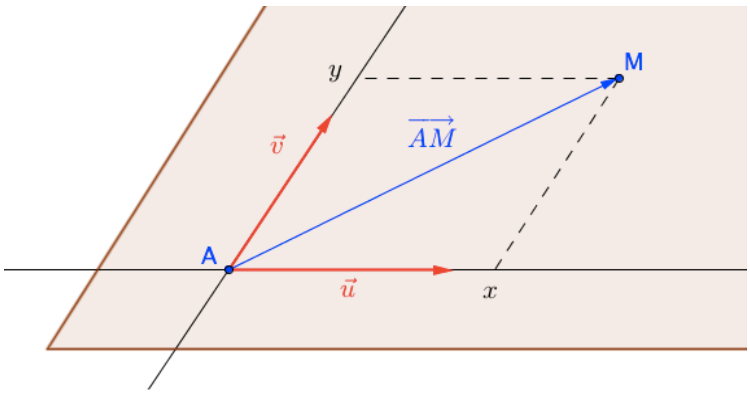
1) Direction d'un plan de l'espace

Propriétés : Deux vecteurs non nuls et non colinéaires déterminent la direction d'un plan.



2) Caractérisation d'un plan de l'espace

Propriété : Soit un point A et deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ est le plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Remarque : Dans ces conditions, le triplet $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ est un repère du plan.

Démonstration :
- Soit deux points B et C tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ est un repère du plan (ABC). Dans ce repère, tout point M de coordonnées (x, y) est tel que $\overrightarrow{AM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$.

- Réciproquement, soit M un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$.
Soit N le point du plan (ABC) de coordonnées (x, y) dans le repère $(A\,;\vec{u},\vec{v})$. Alors $\overrightarrow{AN} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$ et donc $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$.
M et N sont confondus donc M appartient à (ABC).

Remarque :
Un plan est donc totalement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires.

Propriété : Deux plans déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

Démonstration :
Soit deux plan *P* et *P'* de repères respectifs $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ et $(B\,;\vec{u},\vec{v})$.
- Si *P* et *P'* sont confondus, la démonstration est triviale.
- Dans la suite *P* et *P'* ne sont pas confondus.

Supposons que *P* et *P'* possède un point M en commun.
Alors dans *P*, on a : $\overrightarrow{AM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$, où (x, y) sont les coordonnées de M dans *P*.
Et dans *P'*, on a : $\overrightarrow{BM} = x'\,\vec{u} + y'\,\vec{v}$, où (x', y') sont les coordonnées de M dans *P'*.
Donc $\overrightarrow{AB} = (x - x')\,\vec{u} + (y - y')\,\vec{v}$ donc B appartient à *P*.
Donc le repère $(B\,;\vec{u},\vec{v})$ est un repère de *P* et donc *P* et *P'* sont confondus ce qui est contraire à l'hypothèse de départ.
P et *P'* n'ont aucun point en commun et sont donc parallèles.

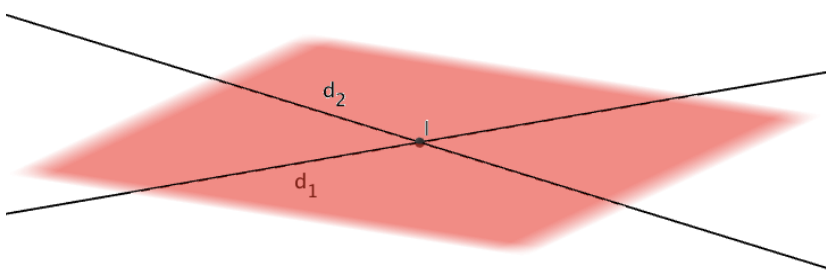
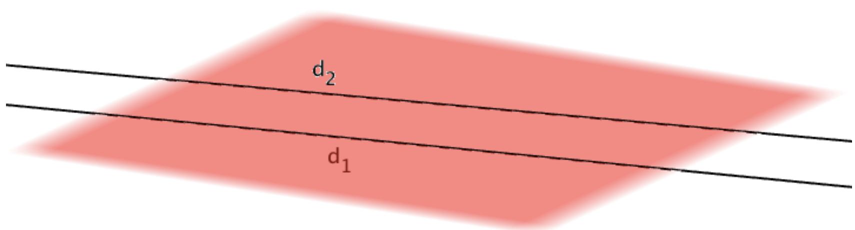
Conséquence : Pour démontrer que deux plans sont parallèles, il suffit de montrer que deux vecteurs non colinéaires de l'un des plans sont respectivement colinéaires à deux vecteurs non colinéaires de l'autre.

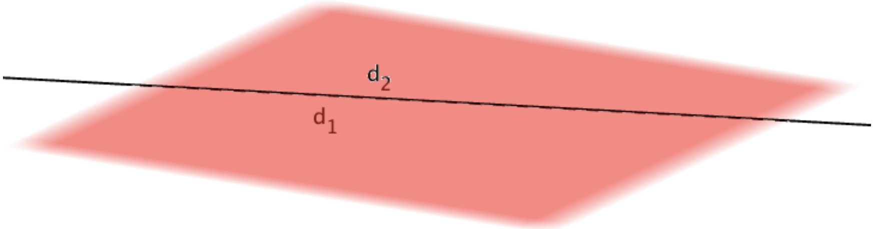
Un exemple d'application :
Vidéo https://youtu.be/6B1IiGkQL8E

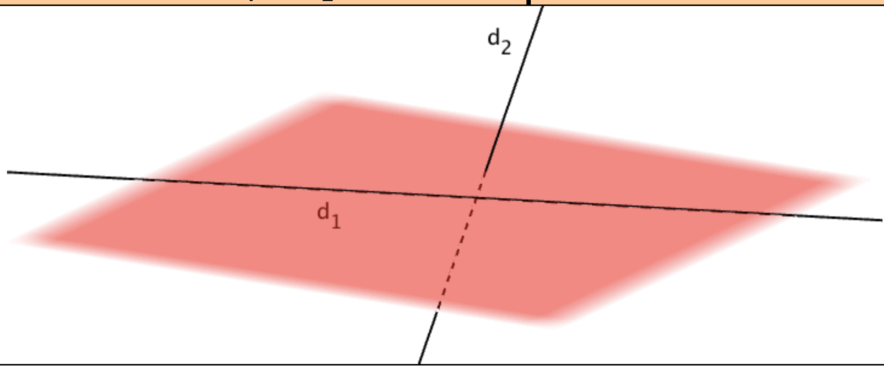
IV. Positions relatives de droites et de plans de l'espace

1) Positions relatives de deux droites

Propriété : Deux droites de l'espace sont soit coplanaires (dans un même plan) soit non coplanaires.

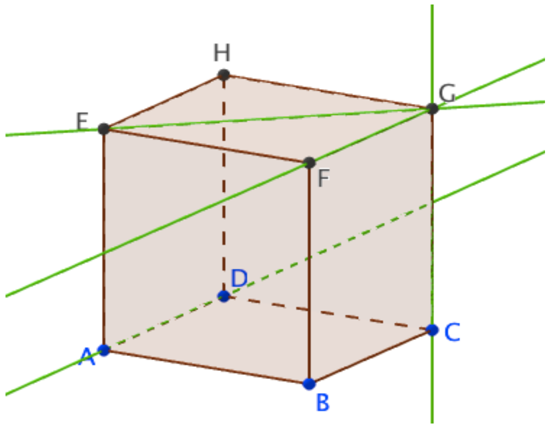
d_1 et d_2 sont coplanaires	
d_1 et d_2 sont sécantes	
d_1 et d_2 sont parallèles	 d_1 et d_2 sont strictement parallèles

	 d_1 et d_2 sont confondus

d_1 et d_2 sont non coplanaires


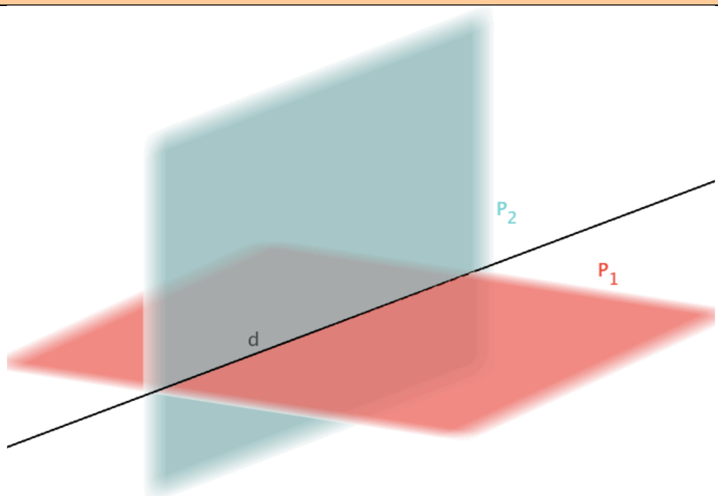
<ins>Exemple :</ins>

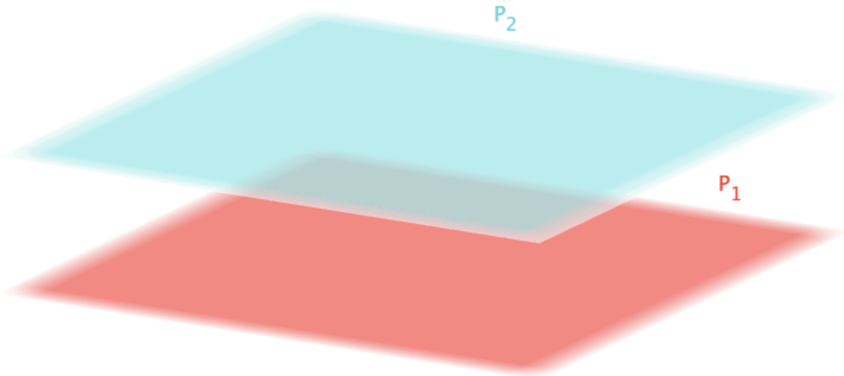
ABCDEFGH est un cube.
- Les droites (EG) et (FG) appartiennent au même plan (EFG) et sont sécantes en G.
- Les droites (AD) et (FG) appartiennent au même plan (ADG) et sont parallèles.
- Les droites (AD) et (CG) sont non coplanaires.



2) <ins>Positions relatives de deux plans</ins>

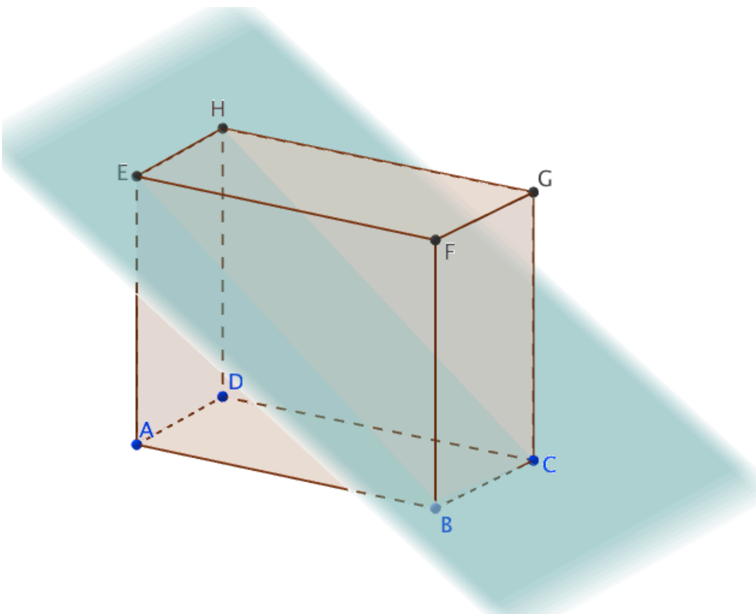
<ins>Propriété :</ins> Deux plans de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

P_1 et P_2 sont sécants
 P_1 et P_2 sont sécants suivant la droite d

P_1 et P_2 sont parallèles
 P_1 et P_2 sont strictement parallèles
 P_1 et P_2 sont confondus

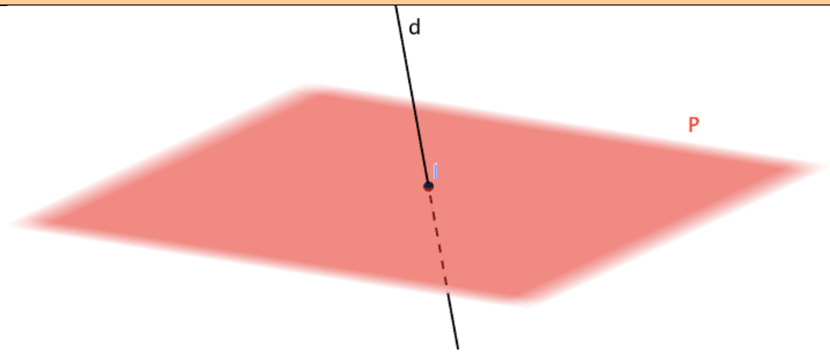
<u>Exemple :</u>

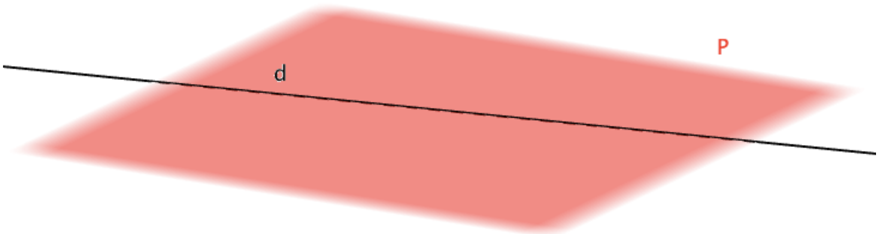
ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.
- Les plans (BCG) et (BCE) sont sécants suivant la droite (BC).
- Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles



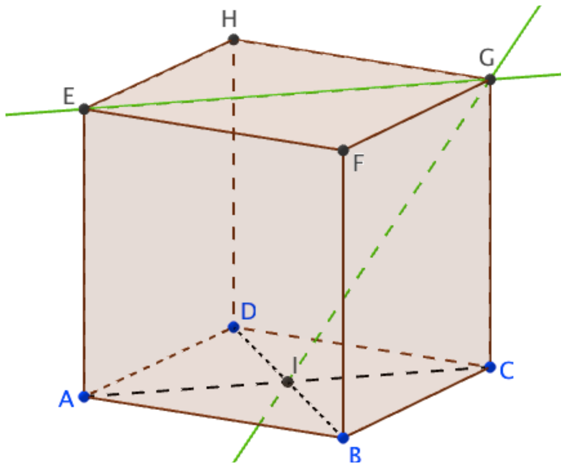
3) <u>Positions relatives d'une droite et d'un plan</u>

<u>Propriété :</u> Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

***d* et *P* sont sécants**
 *d* et *P* sont sécants en un point *I*

***d* et *P* sont parallèles**
 *d* est incluse dans *P*
 *d* et *P* sont strictement parallèles

<u>Exemple :</u>

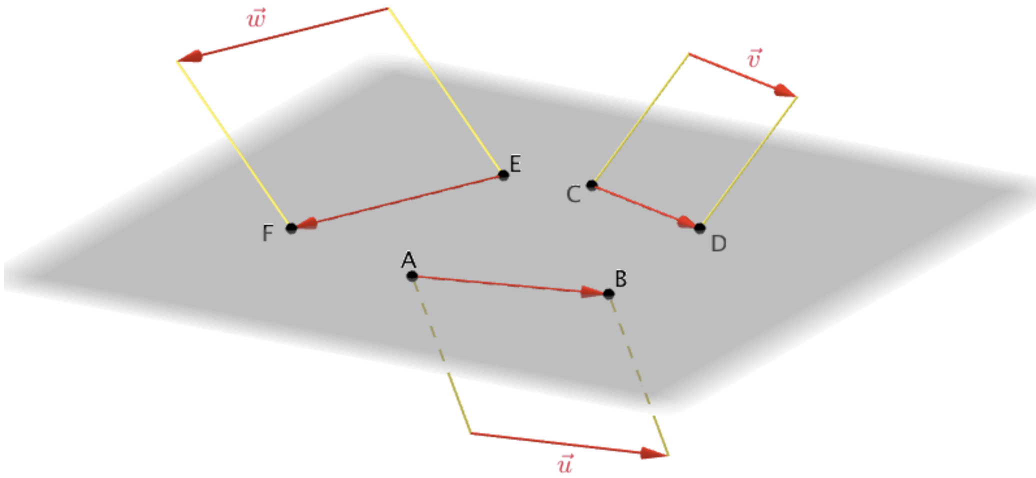


ABCDEFGH est un cube.
- La droite (GI) et le plan (ABC) sont sécants en I.
- La droite (EG) est incluse dans le plan (EFG).
- La droite (EG) et le plan (ABC) sont parallèles.

V. <u>Bases et repères de l'espace</u>

1) <u>Vecteurs coplanaires et bases de l'espace</u>

<u>Définition :</u> Trois vecteurs sont **coplanaires** s'ils possèdent des représentants appartenant à un même plan.



Propriété : Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont coplanaires, s'il existe un couple de réels $(x\,;y)$ tel que $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$.

Application : Démontrer que 4 points sont coplanaires

Vidéo https://youtu.be/9baU60ZNioo

Propriété : Soit $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires.
Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet $(x\,;y\,;z)$ tel que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

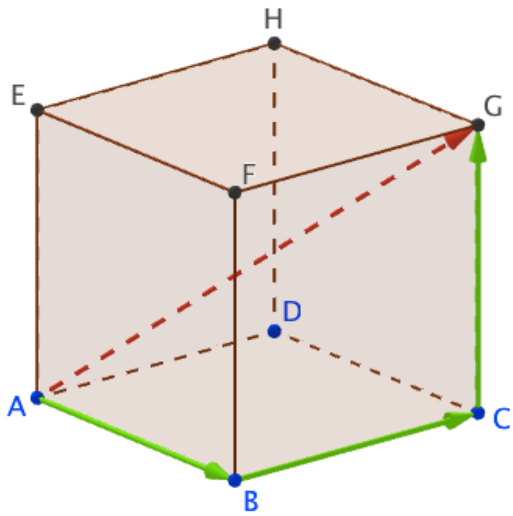
Démonstration :
- Existence : Soit $\overrightarrow{AB}$ un représentant de $\vec{u}$.
Soit *P* le plan de repère $(A\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.
Si B appartient à *P* alors $\overrightarrow{AB}$ se décompose suivant les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
Supposons que B n'appartient pas à *P.*
Soit *d* la droite passant par B de vecteur directeur $\vec{k}$.
Comme $\vec{k}$ n'est pas colinéaire avec $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, la droite *d* coupe le plan *P* en un point C.
On peut écrire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.
$\overrightarrow{AC}$ appartient au plan *P* donc il existe un couple $(x\,;y)$ tel que $\overrightarrow{AC} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.
$\overrightarrow{CB}$ est colinéaire avec $\vec{k}$ donc il existe un réel z tel que $\overrightarrow{CB} = z\vec{k}$.
Il existe donc un triplet $(x\,;y\,;z)$ tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

- Unicité : On suppose que l'on ait les deux écritures distinctes :
$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$
Alors $(x - x')\vec{\imath} + (y - y')\vec{\jmath} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}$.
Supposons que l'une au moins des trois différences n'est pas nulle, par exemple :
$z - z' \neq 0$.
Donc $\vec{k} = \frac{x'-x}{z-z'}\,\vec{\imath} + \frac{y'-y}{z-z'}\,\vec{\jmath}$ et dans ce cas, les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ seraient coplanaires. Ce qui est exclu.
Les trois différences $x' - x$, $y' - y$ et $z' - z$ sont donc nulles.

Définition : Soit $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.
On appelle **base de l'espace** le triplet $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$.

Méthode : Reconnaitre une base de l'espace

Vidéo https://youtu.be/5a9pE6XQna4



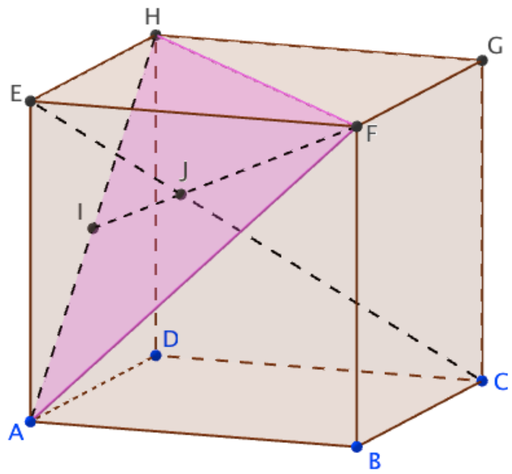
ABCDEFGH est un cube.
1) Reconnaître une base de l'espace.
2) Décomposer le vecteurs $\overrightarrow{AG}$ dans cette base.

1) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont non coplanaires donc forment une base de l'espace.
2) Le vecteurs $\overrightarrow{AG}$ se décompose dans la base $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{CG}\right)$ en : $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}$.

Méthode : Démontrer l'alignement par décomposition de vecteurs dans une base

Vidéo https://youtu.be/i4jDkJNtzZg

$ABCDEFGH$ est un cube.
Soit I le milieu de $[AH]$ et J le point de $[FI]$ tel que :
$\overrightarrow{FJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{FI}$
Démontrer que les points E, J et C sont alignés.



Pour prouver cet alignement, on va démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont non coplanaires donc il est possible de décomposer les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EJ}&=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FJ}\\&=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{FI}\\&=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}\right)\\&=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EH}\right)\\&=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EH}\right)\\&=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{FE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}\\&=\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EC}&=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

Donc :

$$\overrightarrow{EJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires et donc les points E, J et C sont alignés.

2) Repère de l'espace

Définition : Soit $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires. O est un point de l'espace.
On appelle **repère de l'espace** le quadruplet $\left(O\,;\,\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

Remarques : - O est appelé l'origine du repère.

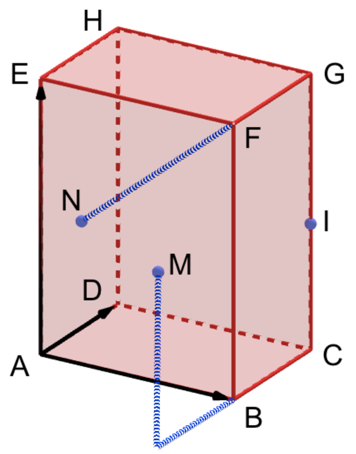
- La décomposition $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ donne les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du point M.

- De même, la décomposition $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ donne les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du vecteur $\vec{u}$.

Méthode : Lire des coordonnées dans l'espace

Vidéo https://youtu.be/PZeBXIhNBAk

Soit un parallélépipède $ABCDEFGH$.
I est le milieu de $[CG]$.
M et N sont définis par : $\overrightarrow{NF} = 2\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CI}$
1) Dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, donner les coordonnées de tous les points de la figure.
2) Placer le point $K(1\,;3\,;\,-1)$.



1) $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} E\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} G\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} H\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$I\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} M\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} N\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2)