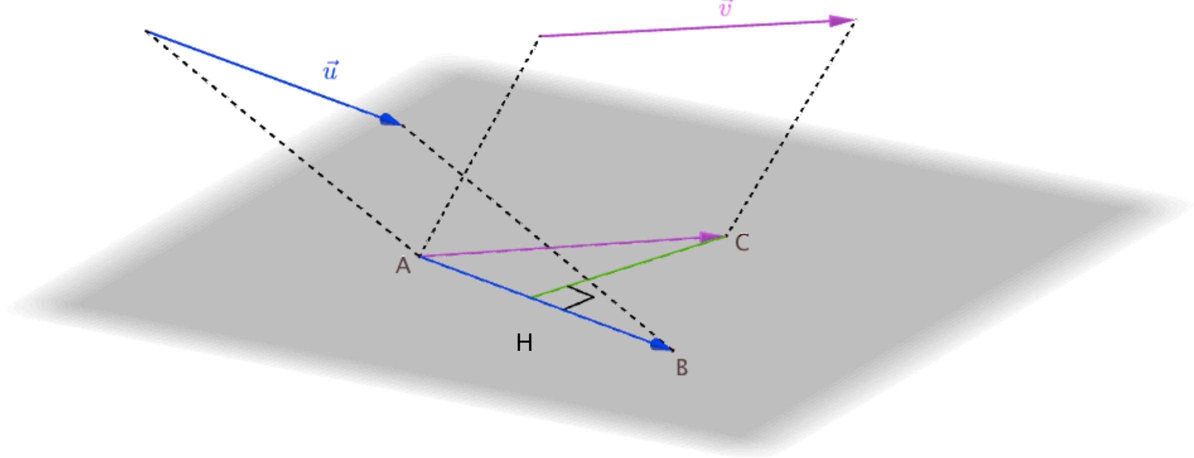
PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

I. Produit scalaire de deux vecteurs

1) Définition

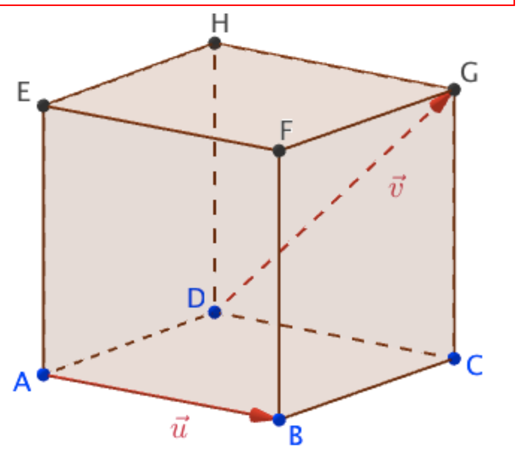
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Il existe un plan *P* contenant les points A, B et C.

Définition :
On appelle **produit scalaire de l'espace** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le produit $\vec{u}.\vec{v}$ égal au produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans le plan *P*.



On a ainsi :
- $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est un vecteur nul,
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$

Exemple :
Vidéo https://youtu.be/vp3lCG3rRQk



$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a.

$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v} &= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}\\ &= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}\\ &= AB \times AB = a^2\end{aligned}$$

2) Propriétés

Les propriétés dans le plan sont conservées dans l'espace.

Propriétés : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
- $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
- Symétrie : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- Bilinéarité : $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ et $(\vec{v}+\vec{w}).\vec{u} = \vec{v}.\vec{u} + \vec{w}.\vec{u}$
  $(k\,\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\,\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v}), k \in \mathbb{R}$
- Orthogonalité : $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux (ou $\vec{u} = 0$ et $\vec{v} = 0$)

Démonstration :
Il existe un plan *P* tel que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ admettent des représentants dans *P*.
Dans le plan, les règles de géométrie plane sur les produits scalaires s'appliquent.

3) Identités remarquables

Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, on a :
1) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
2) $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

4) Formules de polarisation

Propriété : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, on a :
1) $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$
2) $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
3) $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

II. Produit scalaire dans un repère orthonormé

1) Base et repère orthonormé

Définition : Une base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace est **orthonormée** si :
- les vecteurs $\vec{\imath},\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux,
- les vecteurs $\vec{\imath},\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont unitaires, soit : $\|\vec{\imath}\| = 1$, $\|\vec{\jmath}\| = 1$ et $\|\vec{k}\| = 1$.

Définition : Un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace est **orthonormé,** si sa base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est orthonormée**.**

2) Expression analytique du produit scalaire

Propriété : Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.
Et en particulier : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Démonstration :
$\vec{u}.\vec{v} = \left(x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}\right).\left(x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath} + z'\,\vec{k}\right)$
$= xx'\vec{\imath}.\vec{\imath} + xy'\vec{\imath}.\vec{\jmath} + xz'\vec{\imath}.\vec{k} + yx'\vec{\jmath}.\vec{\imath} + yy'\vec{\jmath}.\vec{\jmath} + yz'\vec{\jmath}.\vec{k} + zx'\vec{k}.\vec{\imath} + xy'\vec{k}.\vec{\jmath} + zz'\vec{k}.\vec{k}$
$= xx' + yy' + zz'$

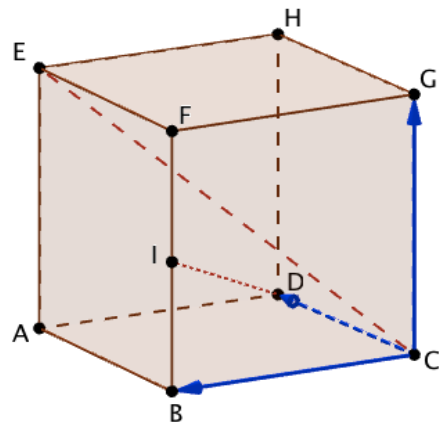
En effet, on a par exemple dans le plan définit par le couple $(\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$:

$\vec{\imath}.\vec{\imath} = \|\vec{\imath}\|^2 = 1$, $\vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \|\vec{\jmath}\|^2 = 1$ et $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{\imath} = 0$

On a en particulier : $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}.\vec{u} = xx + yy + zz = x^2 + y^2 + z^2$.

<u>Exemple :</u>

Vidéo https://youtu.be/N1IA15sKH-E



On considère le repère de l'espace $\left(C\,;\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CG}\right)$.

Alors : $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}1-0\\0-1\\0,5-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}1\\-1\\0,5\end{pmatrix}$.

Alors : $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{DI} = 1\times 1 + 1\times(-1) + 1\times 0,5 = 0,5$.

Les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{DI}$ ne sont pas orthogonaux.

3) <u>Conséquence : Expression de la distance entre deux points</u>

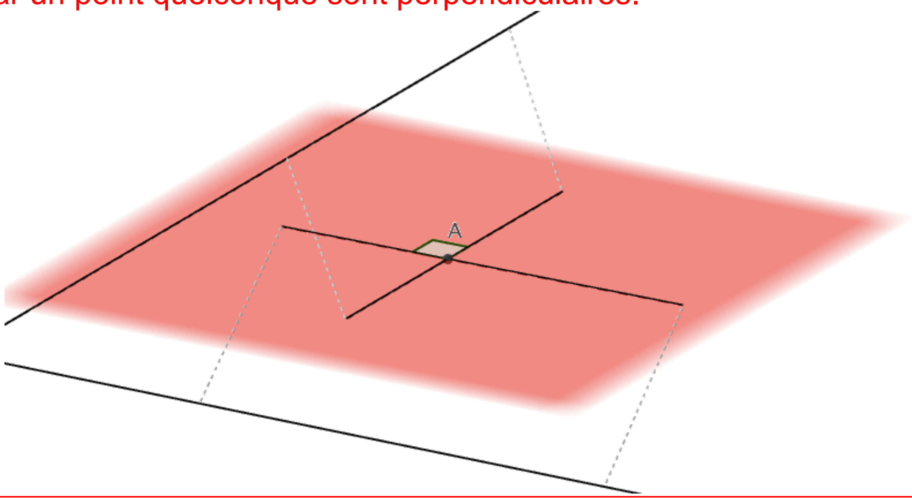
<u>Propriété :</u> Soit $A(x_A, y_A, z_A,)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace. On a :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

II. <u>Orthogonalité</u>

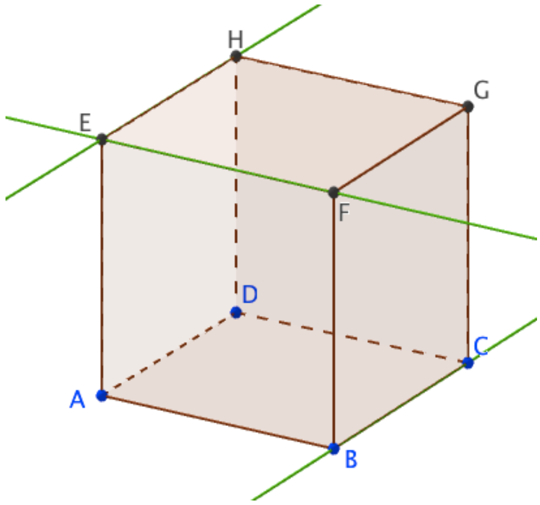
1) <u>Orthogonalité de deux droites</u>

<u>Définition :</u> Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque leurs parallèles passant par un point quelconque sont perpendiculaires.



Exemple :

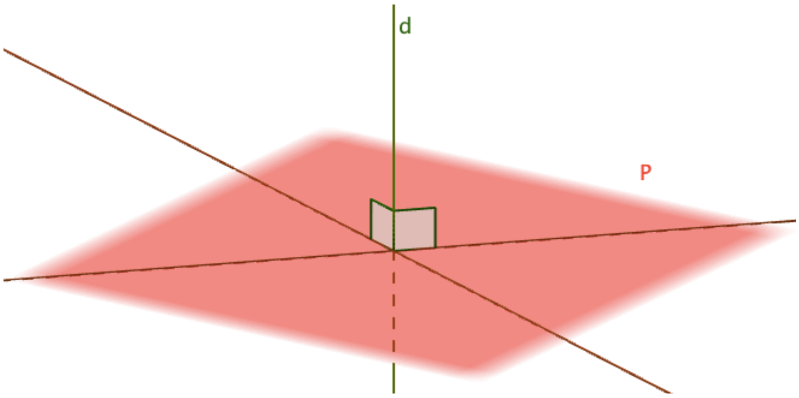
ABCDEFGH est un cube.
- Les droites (EH) et (EF) sont perpendiculaires.
- Les droites (BC) et (EF) sont orthogonales.



Remarques :
- Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes.
- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales. La réciproque n'est pas vraie car deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires et sécantes.

2) Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Propriété : Une droite *d* est orthogonale à un plan *P* si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de *P*.

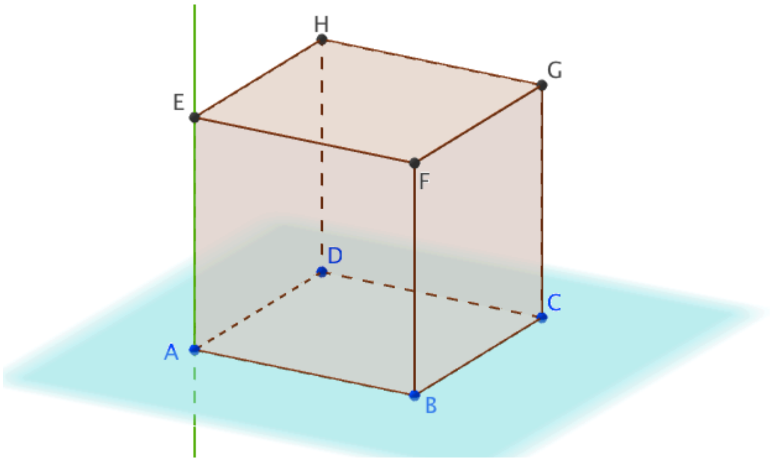


Propriété : Si une droite *d* est orthogonale à un plan *P* alors elle est orthogonale à toutes les droites de *P*.

Démonstration :
Soit une droite d de vecteur directeur $\vec{n}$ orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 de *P*. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs directeurs respectifs de d_1 et d_2.
Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires et orthogonaux au vecteur $\vec{n}$.
Soit une droite quelconque Δ de *P* de vecteur directeur $\vec{w}$.
Démontrons que Δ est orthogonale à d.
$\vec{w}$ peut se décomposer en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui constituent une base de *P* (car non colinéaires).
Il existe donc deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
Donc $\vec{w}.\vec{n} = x\vec{u}.\vec{n} + y\vec{v}.\vec{n} = 0$, car $\vec{n}$ est orthogonal avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Donc $\vec{n}$ est orthogonal au vecteur $\vec{w}$.
Et donc d est orthogonale à Δ.

Exemple :

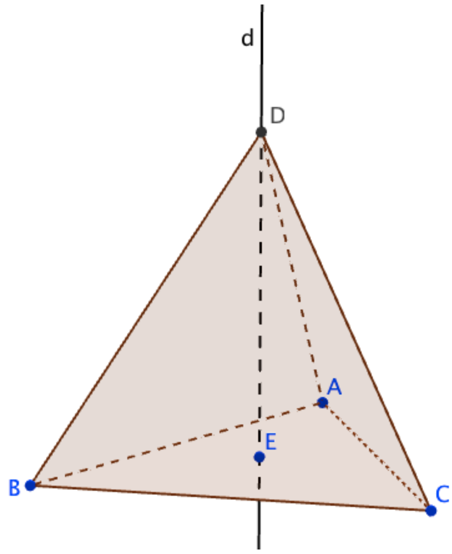
ABCDEFGH est un cube.
(AE) est perpendiculaire aux droites (AD) et (AB).
(AB) et (AD) sont sécantes et définissent le plan (ABC).
Donc (AE) est orthogonal au plan (ABC).



Méthode : Démontrer que des droites sont orthogonales

Vidéo https://youtu.be/qKWghhaQJUs

ABC est un triangle équilatéral. E est le point d'intersection de ses médianes.
La droite *d* passant par E est orthogonale au plan (ABC).
La pyramide ABCD est telle que D soit un point de la droite *d*.
Démontrer que les droites (BD) et (AC) sont orthogonales.



La droite *d* est orthogonale au plan (ABC).
Comme la droite (AC) appartient au plan (ABC), la droite (AC) est orthogonale à la droite *d*.

Par ailleurs, la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (BE) car dans un triangle équilatéral, les médianes et les hauteurs sont confondues.

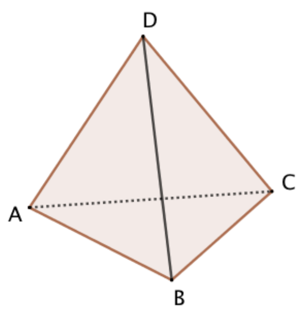
Ainsi, (AC) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BED) : (BE) et *d*.
Donc (AC) est orthogonale au plan (BED).

La droite (BD) appartient au plan (BED) donc la droite (AC) est orthogonale à la droite (BD).

Méthode : Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité

Vidéo https://youtu.be/8Obh6clZeEw

Soit un tétraèdre régulier $ABCD$ d'arêtes de longueur l.
Démontrer que les arêtes $[AD]$ et $[BC]$ sont orthogonales.



On va prouver que $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$.

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$
$= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$
$= -\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$

Dans le triangle équilatéral ABD, on a :
$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = AD \times AB \times cos\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}\right)$
$= l \times l \times \cos\frac{\pi}{3} = \frac{l^2}{2}$
On démontre de même dans le triangle équilatéral ADC que :
$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = \frac{l^2}{2}$
Ainsi : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = -\frac{l^2}{2} + \frac{l^2}{2} = 0$
Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc orthogonaux.
Les arêtes $[AD]$ et $[BC]$ sont orthogonales

Remarque : Dans un tétraèdre régulier, deux arêtes quelconques opposés sont orthogonales.

III. Vecteur normal à un plan

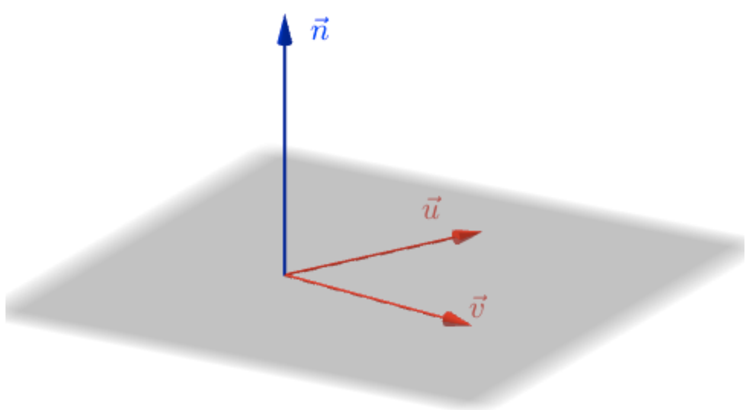
1) Définition et propriétés

Définition : Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est **normal** à un plan *P* lorsqu'il est orthogonal à tout vecteur admettant un représentant dans *P*.

Propriété : - Soit un point A et un vecteur $\vec{n}$ non nul de l'espace.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ est un plan de l'espace.
- Réciproquement, soit *P* un plan de l'espace. Pour tout point A de *P* et tout vecteur normal $\vec{n}$ de *P*, *P* est l'ensemble des points tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.

- Admis -

Théorème : Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est normal à un plan *P*, s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de *P*.

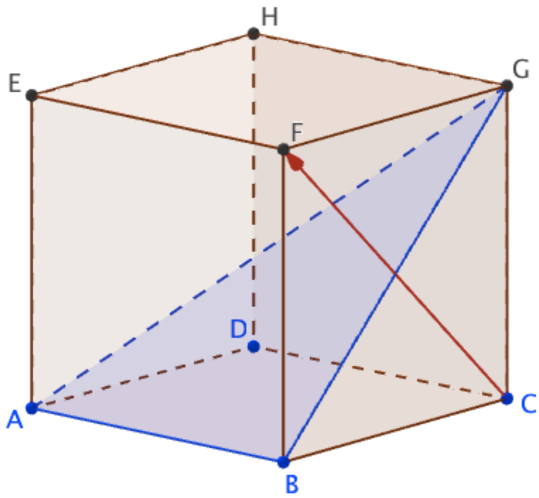


Au XIXe siècle, le vecteur normal $\vec{n}$, appelé produit vectoriel, est noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
Le produit vectoriel a été inventé par un mathématicien allemand, *Hermann Günther Grassmann* (1809 ; 1877).

Méthode : Déterminer si un vecteur est normal à un plan

Vidéo https://youtu.be/aAnz_cP72Q4

$ABCDEFGH$ est un cube.
Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CF}$ est normal au plan (ABG).



On considère le repère $\left(B\,;\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF}\right)$.
Dans ce repère : $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $G\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.
On a ainsi :
$\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$, donc :
$\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{BG} = 0 \times 0 - 1 \times 1 + 1 \times 1 = 0$
$\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{AB} = 0 \times (-1) - 1 \times 0 + 1 \times 0 = 0$

Donc $\overrightarrow{CF}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABG), il est donc normal à (ABG).

Méthode : Déterminer un vecteur normal à un plan

Vidéo https://youtu.be/IDBEI6thBPU

Dans un repère orthonormé, soit $A\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$.
Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$.

Soit un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ orthogonal au plan (ABC). Il est tel que :

$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0\end{cases}$ soit $\begin{cases}-2a + b + 3c = 0\\ a - 2b = 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-2 \times 2b + b + 3c = 0\\ a = 2b\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-3b + 3c = 0\\ a = 2b\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c = b \\ a = 2b \end{cases}$

Prenons par exemple, $b = 1$ (arbitrairement choisi) alors $c = 1$ et $a = 2$.

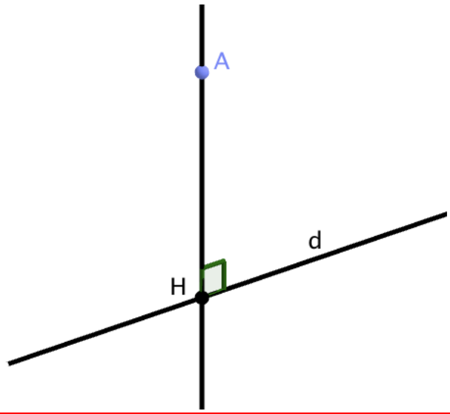
Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc normal au plan (ABC).

Remarque : La solution n'est pas unique. Tout vecteur colinéaire à $\vec{n}$ est solution.

IV. Projection orthogonale

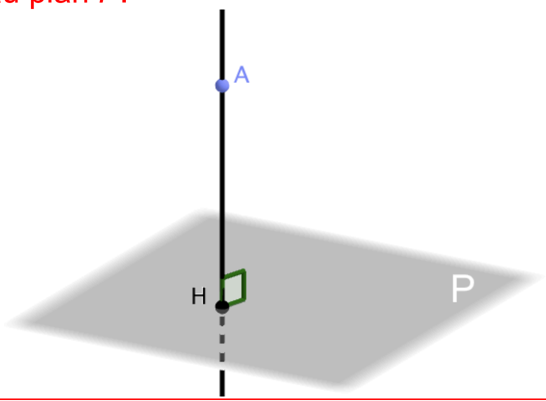
1) Projection orthogonale d'un point sur une droite

Définition : Soit un point A et une droite *d* de l'espace.
La projection orthogonale de A sur *d* est le point H appartenant à *d* tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à la droite *d*.



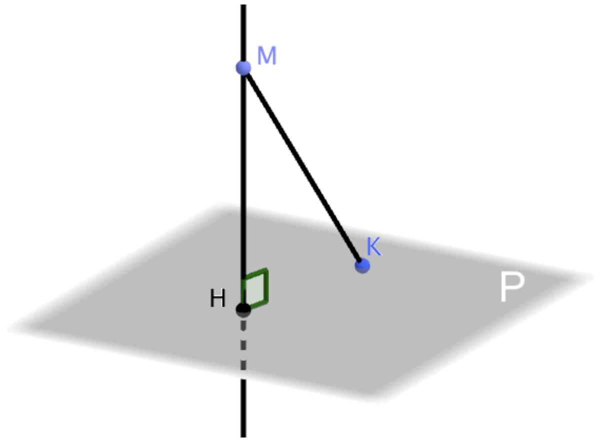
2) Projection orthogonale d'un point sur un plan

Définition : Soit un point A et un plan *P* de l'espace.
La projection orthogonale de A sur *P* est le point H appartenant à *P* tel que la droite (AH) soit orthogonale au plan *P*.



Propriété : Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan P est le point de P le plus proche de M.

Démonstration au programme :



Soit H le projeté orthogonal du point M sur le plan *P*.
Supposons qu'il existe un point K du plan *P* plus proche de M que l'est le point H.

$KM \leq HM$ car K est le point de la droite le plus proche de M.
Donc $KM^2 \leq HM^2$.
Or, (MH) est orthogonale à *P*, donc (MH) est orthogonale à toute droite de *P*.
En particulier, (MH) est perpendiculaire à (HK).
Le triangle MHK est donc rectangle en H.
D'après l'égalité de Pythagore, on a : $HM^2 + HK^2 = KM^2$
Donc $HM^2 + HK^2 \leq HM^2$.
Donc $HK^2 \leq 0$. Ce qui est impossible sauf dans le cas où le point K est le point H.
On en déduit que H est le point du plan le plus proche du point M.

Méthode : Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à un plan

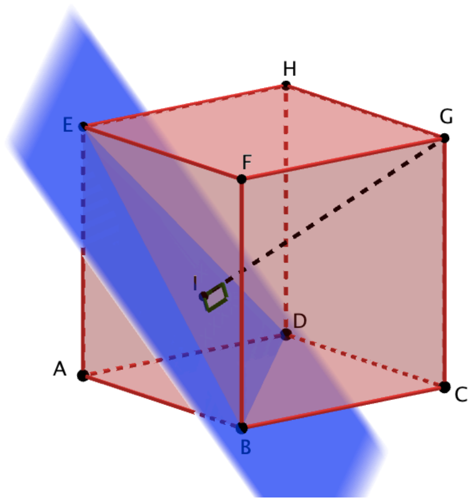
Vidéo https://youtu.be/1b9FtX4sCmQ

On considère un cube $ABCDEFGH$.
Calculer la distance du point G au plan BDE.

Soit I le projeté orthogonal du point G sur le plan BDE.
La distance du point G au plan BDE est égale à la longueur GI.
On considère le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

On cherche à déterminer les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du point I. Dans ce repère, on a :

$B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $G\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



On a alors : $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{GI}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$

Or, (GI) est orthogonale au plan BDE donc le vecteur $\overrightarrow{GI}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{EB}$. Soit :

$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{GI} = 0$
$-1 \times (x-1) + 1 \times (y-1) + 0 \times (z-1) = 0$

$-x+1+y-1=0$
$x=y$

$\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{GI}=0$
$1\times(x-1)+0\times(y-1)+(-1)\times(z-1)=0$
$x-1-z+1=0$
$x=z$

On a ainsi : $x=y=z$

De plus, $\overrightarrow{GI}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{BI}$, soit :
$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{GI}=0$
$(x-1)^2+y(y-1)+z(z-1)=0$
$(x-1)^2+x(x-1)+x(x-1)=0$ car $x=y=z$
$(x-1)(x-1+x+x)=0$
$(x-1)(3x-1)=0$
Donc $3x-1=0$ car $x-1\neq 0$ sinon I et G sont confondus, ce qui est impossible.
Soit : $x=\frac{1}{3}$
On en déduit les coordonnées de I : $\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$.
Et ainsi :

$$IG=\sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}\sqrt{3}\approx 1{,}155$$