

# REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES ET ÉQUATIONS CARTÉSIENNES

## I. Représentation paramétrique d'une droite

Propriété : L'espace est muni d'un repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit une droite  $d$  passant par un point  $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .

On a :  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow$  Il existe un réel  $t$  tel que  $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$

Remarque :

Ce système s'appelle une **représentation paramétrique** de la droite  $d$ .

Démonstration :

$M \in d \Leftrightarrow \vec{u}$  et  $\overrightarrow{AM}$  sont colinéaires

$\Leftrightarrow$  Il existe un réel  $t$  tel que  $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = at \\ y - y_A = bt \\ z - z_A = ct \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

Méthode : Utiliser la représentation paramétrique d'une droite

 **Vidéo** <https://youtu.be/smCUBzJs9xo>

L'espace est muni d'un repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit les points  $A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $B \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite  $(AB)$  avec le plan de repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

- On commence par déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(AB)$  :

Un vecteur directeur de  $(AB)$  est  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1-2 \\ -3-3 \\ 2-(-1) \end{pmatrix}$ , soit  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Une représentation paramétrique de  $(AB)$  est :  $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 6t \\ z = -1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ .

- Soit  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  le point d'intersection de la droite  $(AB)$  avec le plan de repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Alors  $z = 0$  car  $M$  appartient au plan de repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Donc  $-1 + 3t = 0$  soit  $t = \frac{1}{3}$ .

Et donc :  $\begin{cases} x = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \\ y = 3 - 6 \times \frac{1}{3} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

Le point  $M$  a donc pour coordonnées  $\left(\frac{5}{3}; 1; 0\right)$ .

## II. Équation cartésienne d'un plan

**Théorème :** L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Un plan  $P$  de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  non nul admet une équation cartésienne de la forme  $ax + by + cz + d = 0$ , avec  $d \in \mathbb{R}$ .

Réciproquement, si  $a, b$  et  $c$  sont non tous nuls, l'ensemble des points  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  tels que  $ax + by + cz + d = 0$ , avec  $d \in \mathbb{R}$ , est un plan.

### Démonstration au programme :

- Soit un point  $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$  de  $P$ .

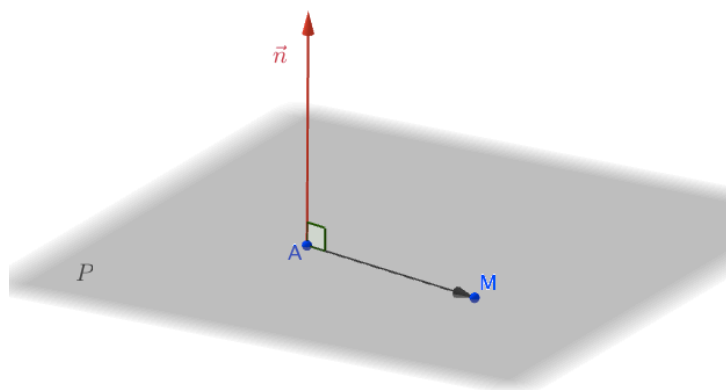
$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$  et  $\vec{n}$  sont orthogonaux

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \text{ avec } d = -ax_A - by_A - cz_A$$



- Réciproquement, supposons par exemple que  $a \neq 0$  ( $a, b$  et  $c$  sont non tous nuls).

On note  $E$  l'ensemble des points  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  vérifiant l'équation  $ax + by + cz + d = 0$

Alors le point  $A\left(-\frac{d}{a}; 0; 0\right)$  vérifie l'équation  $ax + by + cz + d = 0$ . Et donc  $A \in E$ .

Soit un vecteur  $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ . Pour tout point  $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , on a :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a\left(x + \frac{d}{a}\right) + b(y - 0) + c(z - 0) = ax + by + cz + d = 0.$$

$E$  est donc l'ensemble des points  $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ .

Donc l'ensemble  $E$  est le plan passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}$ .

Exemple :

Le plan d'équation cartésienne  $x - y + 5z + 1 = 0$  a pour vecteur normal  $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

Méthode : Déterminer une équation cartésienne de plan

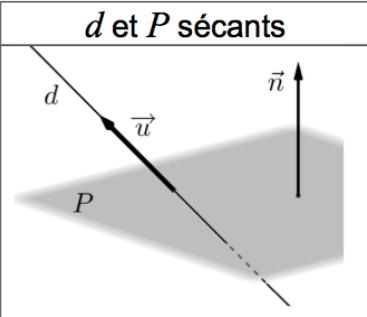
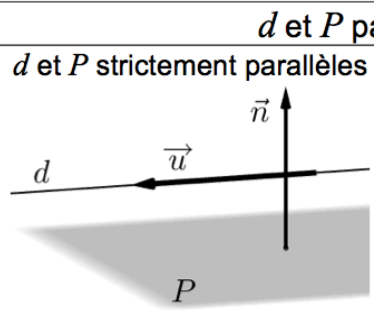
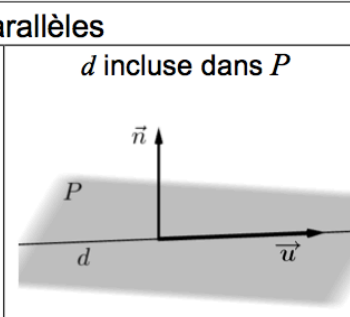
 Vidéo <https://youtu.be/s4xql6IPQBY>

Dans un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne du plan  $P$  passant par le point  $A\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et de vecteur normal  $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- Une équation cartésienne de  $P$  est de la forme  $3x - 3y + z + d = 0$ .
- Le point  $A$  appartient à  $P$  donc ses coordonnées vérifient l'équation :  $3 \times (-1) - 3 \times 2 + 1 + d = 0$  donc  $d = 8$ .

Une équation cartésienne de  $P$  est donc :  $3x - 3y + z + 8 = 0$ .

### III. Positions relatives d'une droite et d'un plan

	$d$ et $P$ sécants	$d$ et $P$ parallèles	
Positions relatives			
- Droite $d$ de vecteur directeur $\vec{u}$			
- Plan $P$ de vecteur normal $\vec{n}$			
Vecteurs	$\vec{u}$ et $\vec{n}$ non orthogonaux	$\vec{u}$ et $\vec{n}$ orthogonaux	
Produit scalaire	$\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$	$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$	

**Méthode :** Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan

 Vidéo <https://youtu.be/BYBMAuyizhE>

Dans un repère orthonormé, le plan  $P$  a pour équation  $2x - y + 3z - 2 = 0$ .

Soit  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  et  $B \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

- 1) Démontrer que la droite  $(AB)$  et le plan  $P$  sont sécants.
- 2) Déterminer leur point d'intersection.

1) Un vecteur normal de  $P$  est  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

$(AB)$  et  $P$  sont sécants si  $\vec{n}$  et  $\overrightarrow{AB}$  ne sont pas orthogonaux.

On a :  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Comme :  $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = -2 \times 2 + 3 \times 3 \neq 0$ , on conclut que  $(AB)$  et le plan  $P$  ne sont pas parallèles et donc sont sécants.

2) Une représentation paramétrique de la droite  $(AB)$  est :

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 \\ z = -3 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Le point  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , intersection de  $(AB)$  et de  $P$ , vérifie donc le système suivant :

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 \\ z = -3 + 3t \\ 2x - y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

On a donc :  $2(1 - 2t) - 2 + 3(-3 + 3t) - 2 = 0$

$$5t - 11 = 0 \text{ soit } t = \frac{11}{5}$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} x = 1 - 2 \times \frac{11}{5} = -\frac{17}{5} \\ y = 2 \\ z = -3 + 3 \times \frac{11}{5} = \frac{18}{5} \end{cases}$$

Ainsi la droite  $(AB)$  et le plan  $P$  sont sécants en  $M \left( -\frac{17}{5} ; 2 ; \frac{18}{5} \right)$ .

**Méthode :** Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

 Vidéo <https://youtu.be/RoacrySIUAU>

Dans un repère orthonormé, on donne les points  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point  $C$  sur la droite  $(AB)$ .

On appelle  $H$  le projeté orthogonal du point  $C$  sur la droite  $(AB)$ .

On a :  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Une représentation paramétrique de  $(AB)$  est :

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Le point  $H$  appartient à la droite  $(AB)$  donc ses coordonnées vérifient les équations du système paramétrique de  $(AB)$ .

On a ainsi :  $H \begin{pmatrix} 1 - 2t \\ 2t \\ 2 - t \end{pmatrix}$  et donc  $\overrightarrow{CH} \begin{pmatrix} 1 - 2t \\ 2t - 1 \\ 2 - t + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2t \\ 2t - 1 \\ 4 - t \end{pmatrix}$

Or,  $\overrightarrow{CH}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont orthogonaux, donc :

$$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$(1 - 2t) \times (-2) + (2t - 1) \times 2 + (4 - t) \times (-1) = 0$$

$$-2 + 4t + 4t - 2 - 4 + t = 0$$

$$9t - 8 = 0$$

$$t = \frac{8}{9}$$

Le point  $H$ , projeté orthogonal du point  $C$  sur la droite  $(AB)$ , a donc pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 1 - 2 \times \frac{8}{9} \\ 2 \times \frac{8}{9} \\ 2 - \frac{8}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{9} \\ \frac{16}{9} \\ \frac{10}{9} \end{pmatrix}$$

**Méthode :** Déterminer l'intersection de deux plans - NON EXIGIBLE -

 Vidéo <https://youtu.be/4dkZ0OQQwaQ>

Dans un repère orthonormé, les plans  $P$  et  $P'$  ont pour équations respectives :

$$-x + 2y + z - 5 = 0 \text{ et } 2x - y + 3z - 1 = 0.$$

- 1) Démontrer que les plans  $P$  et  $P'$  sont sécants.
- 2) Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection  $d$ .

1)  $P$  et  $P'$  sont sécants si leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires.

Un vecteur normal de  $P$  est  $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et un vecteur normal de  $P'$  est  $\vec{n}' \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Les coordonnées des deux vecteurs ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

2) Le point  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  de  $d$ , intersection de  $P$  et de  $P'$ , vérifie donc le système suivant :

$$\begin{cases} -x + 2y + z - 5 = 0 \\ 2x - y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

On choisit par exemple  $x$  comme paramètre et on pose  $x = t$ . On a alors :

$$\begin{cases} x = t \\ -t + 2y + z - 5 = 0 \\ 2t - y + 3z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ z = -2y + t + 5 \\ -y + 3z = 1 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ z = -2y + t + 5 \\ -y + 3(-2y + t + 5) = 1 - 2t \end{cases}$$

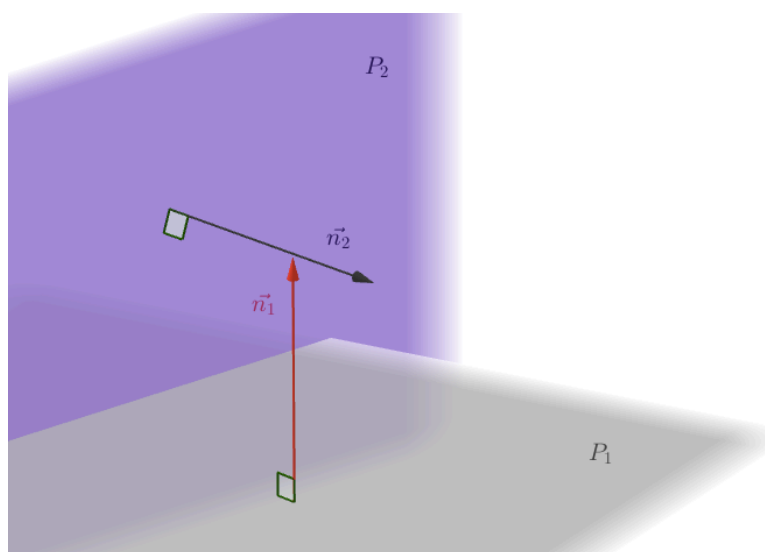
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ z = -2y + t + 5 \\ -y - 6y + 3t + 15 = 1 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ z = -2y + t + 5 \\ -7y = -14 - 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 + \frac{5}{7}t \\ z = -2\left(2 + \frac{5}{7}t\right) + t + 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 + \frac{5}{7}t \\ z = 1 - \frac{3}{7}t \end{cases}$$

Ce dernier système est une représentation paramétrique de  $d$ , avec  $t \in \mathbb{R}$ .

**Propriété :** Deux plans sont perpendiculaires lorsqu'un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

- Admis -



**Méthode :** Démontrer que deux plans sont perpendiculaires

**Vidéo** <https://youtu.be/okvo1SUtHUc>

Dans un repère orthonormé, les plans  $P$  et  $P'$  ont pour équations respectives :

$$2x + 4y + 4z - 3 = 0 \text{ et } 2x - 5y + 4z - 1 = 0.$$

Démontrer que les plans  $P$  et  $P'$  sont perpendiculaires.

Les plans  $P$  et  $P'$  sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

Un vecteur normal de  $P$  est  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$  et un vecteur normal de  $P'$  est  $\vec{n}' \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 2 \times 2 + 4 \times (-5) + 4 \times 4 = 0$$

Les vecteurs  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont orthogonaux donc les plans  $P$  et  $P'$  sont perpendiculaires.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)