FONCTIONS EXPONENTIELLES

**Partie 1 : Définition et propriété**

 1) Définition

On considère la suite géométrique de raison $a$ définie par $u\_{n}=a^{n}$.

Elle est définie pour tout entier naturel $n$.

En prolongeant son ensemble de définition pour tout réel positif, on définit la fonction exponentielle de base $a$.

Ainsi par exemple :

Pour une suite géométrique de raison

$a=2$ et de premier terme 1, on a par exemple : $u\_{4}=2^{4}$.

Pour la fonction correspondante, on a :

$f\left(4\right)=2^{4}$ mais on a également :

$f\left(1,3\right)=2^{1,3}$.

Et de façon générale, $f\left(x\right)=2^{x}$ pour tout réel $x$ positif.

La fonction $f$ est appelée fonction exponentielle de base 2.

L’ensemble de définition des fonctions exponentielles peut ainsi être étendu aux valeurs de $x$ négatives.

Définition : La fonction $x⟼a^{x}$ définie sur $R$, avec $a>0$, s'appelle **fonction exponentielle de base** $a$.

Exemple :

La fonction exponentielle de base 1,2 est définie sur $R$ par $x⟼1,2^{x}$.

Remarque : Avec la calculatrice, il est possible de calculer des valeurs d'une fonction exponentielle.

Propriété : La fonction exponentielle de base $a$ est strictement positive sur ℝ.

 2) Propriétés

Propriétés :

a) $a^{0}=1$ et $a^{1}=a $b) $a^{x}×a^{y}=a^{x+y}$ c) $\frac{a^{x}}{a^{y}}=a^{x-y}$ d) $a^{-x}=\frac{1}{a^{x}}$ e) $\left(a^{x}\right)^{n}=a^{nx}$, avec $n$ un entier relatif.

Méthode : Simplifier une expression

 **Vidéo** [**https://youtu.be/PHTOZid0kzM**](https://youtu.be/PHTOZid0kzM)

Simplifier les expressions suivantes :

$$A=4^{-3}×4^{-5} B=\frac{3^{3}×3^{-2,5}}{9^{5}} C=\left(4,8^{-2,1}\right)^{3}×4,8^{6,2}$$

**Correction**

$$A=4^{-3}×4^{-5} B=\frac{3^{3}×3^{-2,5}}{9^{5}} C=\left(4,8^{-2,1}\right)^{3}×4,8^{6,2}$$

$$A=4^{-3+(-5)} B=\frac{3^{3}×3^{-2,5}}{(3^{2})^{5}} C=4,8^{-2,1×3}×4,8^{6,2}$$

$$A=4^{-8} B=\frac{3^{3-2,5}}{3^{2×5}} C=4,8^{-6,3}×4,8^{6,2}$$

$$ B=\frac{3^{0,5}}{3^{10}} C=4,8^{-6,3+6,2}$$

$$ B=3^{0,5-10} C=4,8^{-0,1}$$

$$ B=3^{-9,5} C=\frac{1}{4,8^{0,1}}$$

$$ B=\frac{1}{3^{9,5}} $$

**Partie 2 : Variations de la fonction exponentielle**

 **Vidéo** [**https://youtu.be/YQoR7CFM\_1U**](https://youtu.be/YQoR7CFM_1U)

|  |  |
| --- | --- |
| $$0<a<1$$ | $$a>1$$ |
| $x⟼a^{x} $est décroissante sur $R$ | $x⟼a^{x}$ est croissante sur $R$ |
| Capture d’écran 2012-05-21 à 16 | Capture d’écran 2012-05-21 à 16 |

Exemples :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Fonction $$N×a^{x}$$ | $$a=…$$ | Variation de $$a^{x}$$ | $$N=…$$ | Variation de $$N×a^{x}$$ | Variation de $$f$$ |
| $$f\left(x\right)=-2×4^{x}$$ | $$a=4$$ | $4^{x}$ est croissantecar $a>1$ | $N=-2$ est négatif | $-2×4^{x}$ est décroissante | $f$ est décroissante |
| $$f\left(x\right)=3×0,5^{x}$$ | $$a=0,5$$ | $0,5^{x}$ est décroissante car $a<1$ | $N=3$ est positif | $3×0,5^{x}$ est décroissante | $f$ est décroissante |
| $$f\left(x\right)=-4×0,2^{x}$$ | $$a=0,2$$ | $0,2^{x}$ est décroissante car $a<1$ | $N=-4$ est négatif | $-4×0,2^{x}$ est croissante | $f$ est croissante |
| $$f\left(x\right)=7^{x}$$ | $$a=7$$ | $7^{x}$ est croissante car $a>1$ |  |  | $f$ est croissante |
| $$f\left(x\right)=0,4^{x}$$ | $$a=0,4$$ | $0,4^{x}$ est décroissante car $a<1$ |  |  | $f$ est décroissante |
| $$f\left(x\right)=9×8^{x}$$ | $$a=8$$ | $8^{x}$ est croissante car $a>1$ | $N=9$ est positif | $9×8^{x}$ est croissante | $f$ est croissante |

Remarques :

* On retrouve les résultats établis pour la variation des suites géométriques.
* Si $a=1$ alors la fonction exponentielle est constante. En effet, dans ce cas,

$$a^{x}=1^{x}=1$$

* Quel que soit $a$, la fonction exponentielle passe par le point (0 ; 1). En effet, $a^{0}=1$.

Méthode : Étudier les variations d’une fonction exponentielle

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies par : $f\left(x\right)=0,9^{x}$ et $g\left(x\right)=-3×5^{x}$

Étudier les variations de $f$ et $g$.

**Correction**

● $f$ est de la forme $f\left(x\right)=a^{x}$ avec $a=0,9$ $<1$, donc $f$ est décroissante.

● $g$ est de la forme $g\left(x\right)=N×a^{x}$ avec $a=5$ $>1$, donc $x↦5^{x}$ est croissante.

Et $N=-3$ est négatif donc $g$ est décroissante.

Méthode : Utiliser une fonction exponentielle

 **Vidéo** [**https://youtu.be/maK64g-y3gA**](https://youtu.be/maK64g-y3gA)

Par suite d’une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction $f$ définie sur [0 ; 10] par :$ $

$f\left(x\right)=50 000×1,15^{x}$.

a) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.

b) Déterminer les variations de $f$ sur [0 ; 10].

c) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a doublé ?

**Correction**

a) $f\left(3\right)=50 000×1,15^{3}≈76 000$

 $f\left(5,5\right)=50 000×1,15^{5,5}≈108 000$

b) On pose $u\left(x\right)=1,15^{x}$.

$u$ est de la forme $u\left(x\right)=a^{x}$ avec $a=1,15>1$, donc $u$ est croissante.

Or, $g\left(x\right)=50 000×1,15^{x}=50 000×u(x)$, donc $f$ est croissante sur [0 ; 10].



c) Le nombre de bactéries a doublé à partir de $100 000$ bactéries, soit au bout d'environ 5h.

Résumé schématique pour les variations :

**1.** Si $a>1$, la fonction $a^{x}$ est **croissante**

 Si $0<a<1$, la fonction $a^{x}$ est **décroissante**

 N $×a^{x}$

**2.** Si N$ >0$, la fonction N $×a^{x}$ **garde** le sens de variation de **1.**

 Si N $<0$, la fonction N $×a^{x}$ **change** le sens de variation de **1.**

 **Exemple :**

**1.** $0<a=0,3<1 $: la fonction $0,3^{x}$ est **décroissante**

 $-2$ $×0,3^{x}$

**2.** N $=-2<0 $: la fonction $-2$ $×0,3^{x}$ **change** le sens de variation de **1.** Elle est donc **croissante**.

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)