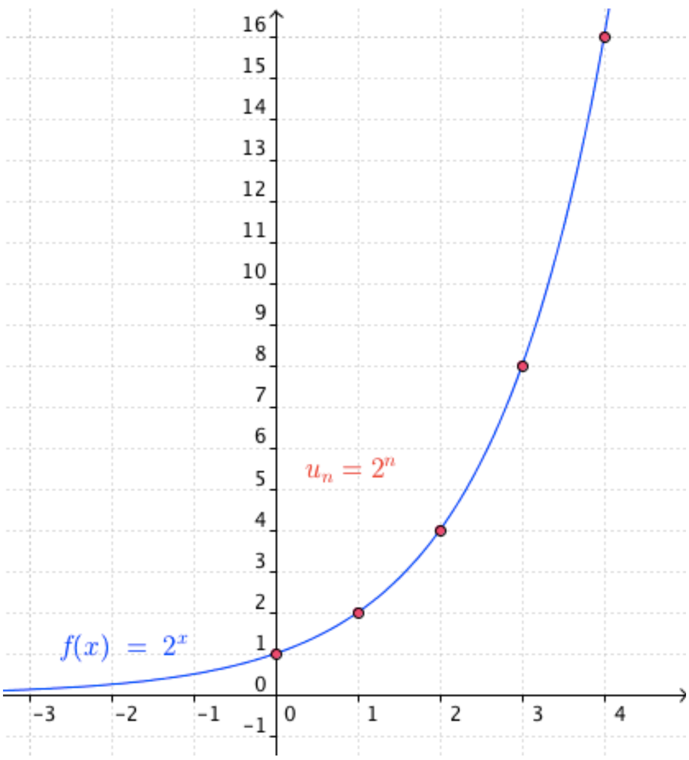
FONCTIONS EXPONENTIELLES

I. Définition et propriété

1) Définition

On considère la suite géométrique de raison a définie par $u_n = a^n$.
Elle est définie pour tout entier naturel n.
En prolongeant son ensemble de définition pour tout réel positif, on définit la fonction exponentielle de base a.
Ainsi par exemple :
Pour une suite géométrique de raison $a = 2$ et de premier terme 1, on a par exemple : $u_4 = 2^4$.
Pour la fonction correspondante, on a : $f(4) = 2^4$ mais on a également : $f(1{,}3) = 2^{1{,}3}$.
Et de façon générale, $f(x) = 2^x$ pour tout réel x positif.



La fonction f est appelée fonction exponentielle de base 2.

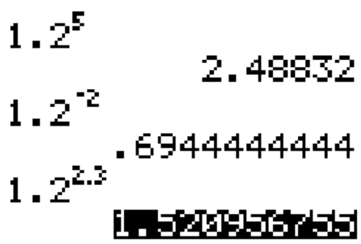
Propriété : $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

L'ensemble de définition des fonctions exponentielles peut ainsi être étendu aux valeurs de x négatives.

Définition : La fonction $x \longmapsto a^x$ définie sur $\mathbb{R}$, avec $a > 0$, s'appelle **fonction exponentielle de base a**.

Exemple :
La fonction exponentielle de base 1,2 est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto 1{,}2^x$.

Remarque : Avec la calculatrice, il est possible de calculer des valeurs d'une fonction exponentielle.



Propriété : La fonction exponentielle de base a est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

2) Propriétés

Propriétés :
a) $a^0 = 1$ et $a^1 = a$
b) $a^{x+y} = a^x \times a^y$
c) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
d) $(a^x)^n = a^{nx}$, avec n un entier relatif.

Méthode : Simplifier une expression

Vidéo https://youtu.be/PHTOZid0kzM

Simplifier les expressions suivantes :

$A = 4^{-3} \times 4^{-5}$ $\quad B = \dfrac{3^3 \times 3^{-2,5}}{9^5}$ $\quad C = (4{,}8^{-2,1})^3 \times 4{,}8^{6,2}$

$A = 4^{-3} \times 4^{-5}$

$A = 4^{-3+(-5)}$

$A = 4^{-8}$

$B = \dfrac{3^3 \times 3^{-2,5}}{9^5}$

$B = \dfrac{3^3 \times 3^{-2,5}}{(3^2)^5}$

$B = \dfrac{3^{3-2,5}}{3^{2\times 5}}$

$B = \dfrac{3^{0,5}}{3^{10}}$

$B = 3^{0,5-10}$

$B = 3^{-9,5}$

$B = \dfrac{1}{3^{9,5}}$

$C = (4{,}8^{-2,1})^3 \times 4{,}8^{6,2}$

$C = 4{,}8^{-2,1\times 3} \times 4{,}8^{6,2}$

$C = 4{,}8^{-6,3} \times 4{,}8^{6,2}$

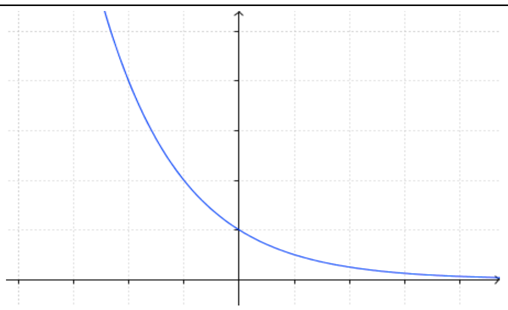
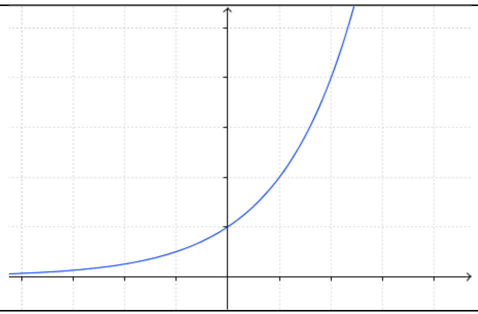
$C = 4{,}8^{-6,3+6,2}$

$C = 4{,}8^{-0,1}$

$C = \dfrac{1}{4{,}8^{0,1}}$

II. Variations de la fonction exponentielle

Vidéo https://youtu.be/YQoR7CFM_1U

$0 < a < 1$	$a > 1$
$x \longmapsto a^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$	$x \longmapsto a^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$
	

Remarques :
- On retrouve les résultats établis pour la variation des suites géométriques.
- Si $a = 1$ alors la fonction exponentielle est constante. En effet, dans ce cas, $a^x = 1^x = 1$
- Quel que soit a, la fonction exponentielle passe par le point (0 ; 1). En effet, $a^0 = 1$.

Méthode : Utiliser une fonction exponentielle

Vidéo https://youtu.be/maK64g-y3gA

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur [0 ; 10] par : $f(x) = 50000 \times 1{,}15^x$.

a) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.
b) Déterminer les variations de f sur [0 ; 10].
c) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a doublé ?

a) $f(3) = 50000 \times 1{,}15^3 \approx 76000$
$f(5{,}5) = 50000 \times 1{,}15^{5{,}5} \approx 108000$

```
50000*1.15^3
             76043.75
50000*1.15^5.5
          107847.0143
```

b) $a = 1{,}15 > 1$ donc la fonction $x \longmapsto 1{,}15^x$ est strictement croissante sur [0 ; 10].
Il en est de même pour la fonction f.

c) Le nombre de bactéries a doublé à partir de 100000 bactéries, soit au bout d'environ 5h.

X	Y1
4.91	99311
4.92	99450
4.93	99589
4.94	99728
4.95	99868
4.96	100007
4.97	100147

X=4.96

III. Taux d'évolution moyen

Méthode : Calculer un taux d'évolution moyen

Vidéo https://youtu.be/8ocIhl-SFuQ

Entre 2012 et 2015, le prix du gaz a augmenté de 25 %. Calculer le taux d'évolution moyen annuel.

On note t le taux d'évolution moyen annuel.
Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation **sur un an** est égal à :

$$1+\frac{t}{100}$$

Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation **sur trois ans** (de 2012 à 2015) est égal à :

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)\times\left(1+\frac{t}{100}\right)\times\left(1+\frac{t}{100}\right)=\left(1+\frac{t}{100}\right)^3$$

Or, sur trois années, le prix a augmenté de 25 % donc ce coefficient multiplicateur est également égal à : $1{,}25$.
On a donc :

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)^3=1{,}25$$

$$1+\frac{t}{100}=1{,}25^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{t}{100}=1{,}25^{\frac{1}{3}}-1$$

$$t=100\times\left(1{,}25^{\frac{1}{3}}-1\right)$$

$$t\approx 7{,}72\ \%$$

Propriété :
Si $x^n=a$ alors $x=a^{\frac{1}{n}}$

Le taux d'évolution moyen annuel est environ égal 7,72%.

Remarque : $a^{\frac{1}{n}}$ est appelé la **racine n-ième** de a.
On peut également noté $\sqrt[n]{a}$.
On a par exemple : Si $x^2=a$ alors $x=\sqrt[2]{a}=\sqrt{a}$!