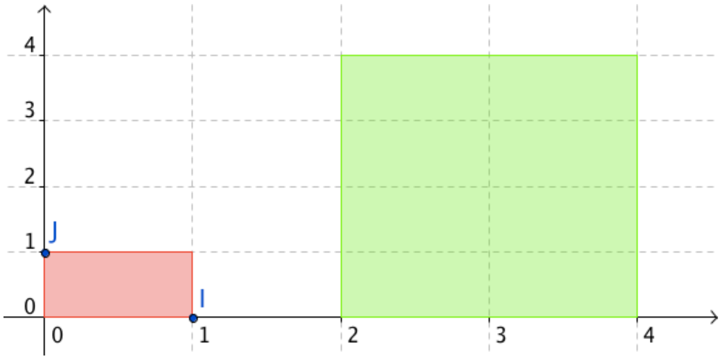
CALCUL INTÉGRAL (Partie 1)

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/pFKzXZrMVxs

En 1696, Jacques Bernoulli reprend le mot latin « integer », déjà utilisé au XIVe siècle, pour désigner le calcul intégral. A cette époque, on partait de l'équation de la courbe pour calculer l'aire sous la courbe, c'est à dire du « bord » de la surface à la surface entière (intégrale).
Au milieu du XIXe siècle, les sciences sociales reprennent le mot pour exprimer l'idée qu'une personne s'intègre à un groupe.

I. Intégrale et aire

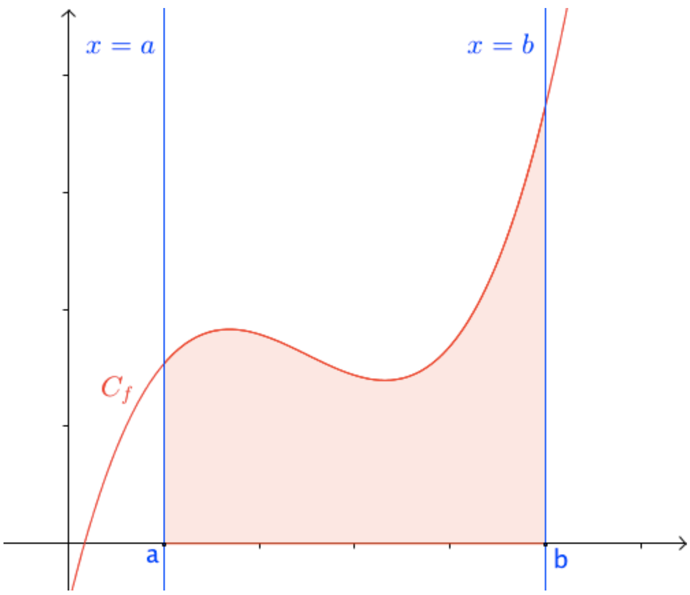
1) Unité d'aire



Dans le repère (O, I, J), le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1. Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit 1 u.a.
L'aire du rectangle vert est égale à 8 fois l'aire du rectangle rouge.
L'aire du rectangle vert est donc égale à 8 u.a.
Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm^2 par exemple).

2) Définition

Définition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.
On appelle **intégrale** de f sur $[a\,;b]$ l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



3) Notation

L'intégrale de la fonction f sur $[a\,;b]$ se note :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Et on lit « intégrale de a à b de $f(x)\,dx$ ».

Cette notation est due au mathématicien allemand *Gottfried Wilhelm von Leibniz* (1646 ; 1716). Ce symbole fait penser à un "S" allongé et s'explique par le fait que l'intégral est égal à une aire calculée comme somme infinie d'autres aires.
Plus tard, un second mathématicien allemand, *Bernhard Riemann* (1826 ; 1866) établit une théorie aboutie du calcul intégral.

Remarques :

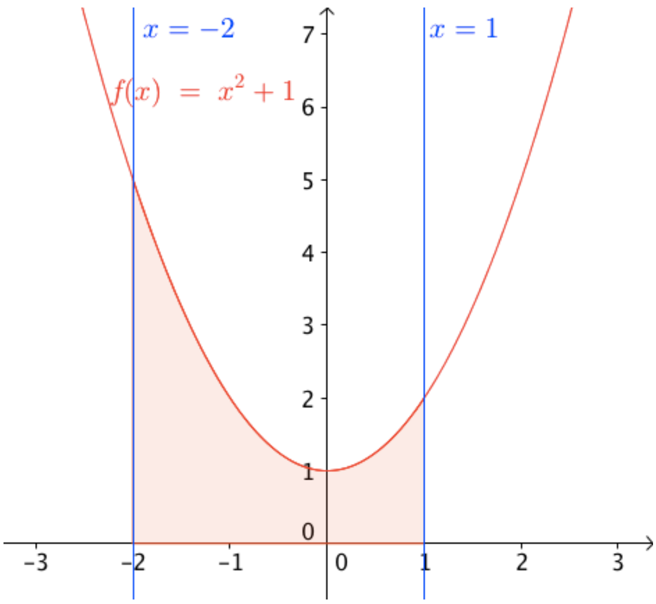
- a et b sont appelés les bornes d'intégration.
- x est la variable. Elle peut être remplacée par toute autre lettre qui n'intervient pas par ailleurs.

Ainsi on peut écrire : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.

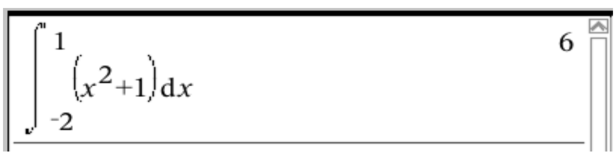
"dx" ou "dt" nous permet de reconnaître la variable d'intégration.

Exemple :

L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$ est l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle [-2 ; 1] et se note $\int_{-2}^{1} x^2 + 1\,dx$.



Un logiciel de calcul formel permet d'obtenir l'aire cherchée.

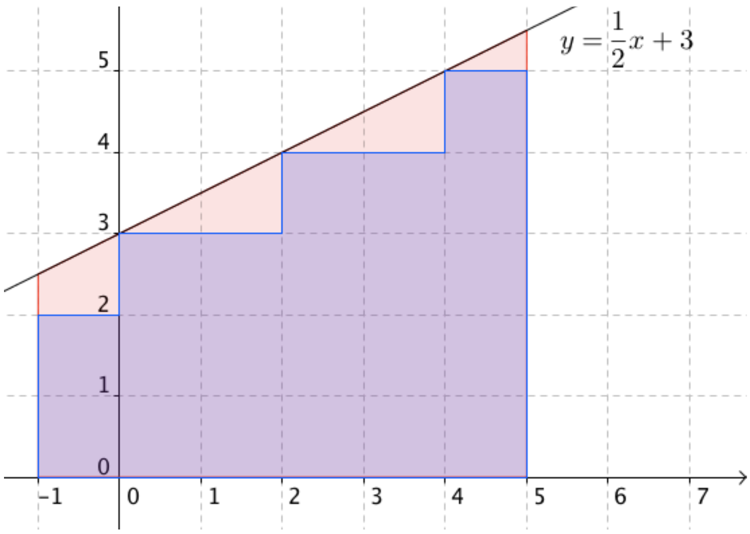


Méthode : Déterminer une intégrale par calculs d'aire

Vidéo https://youtu.be/jkxNKkmEXZA

a) Tracer la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ dans un repère orthonormé.
b) Calculer $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$.

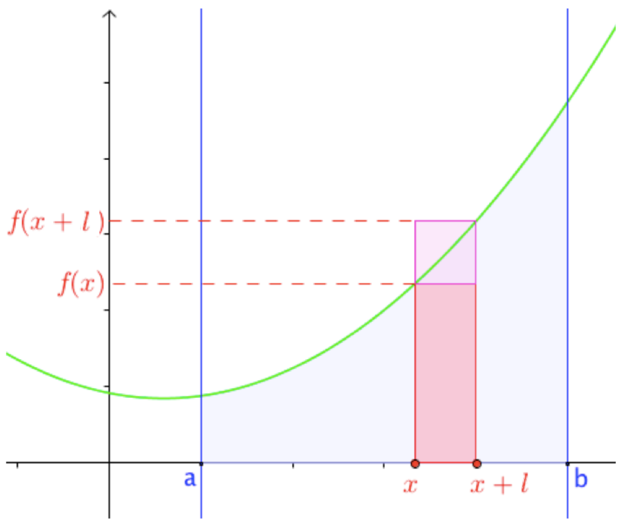
a)



b) Calculer $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$ revient à calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 5$.
Donc par dénombrement, on obtient : $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = 21\,u.a. + 3\,u.a. = 24\,u.a.$

4) Encadrement de l'intégrale d'une fonction monotone et positive

Soit une fonction f continue, positive et monotone sur un intervalle $[a\,;b]$.
On partage l'intervalle $[a\,;b]$ en n sous-intervalles de même amplitude $l = \frac{b-a}{n}$.
Sur un sous-intervalle $[x\,;x+l]$, l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire de deux rectangles :
- l'un de dimension l et $f(x)$ qui a pour aire $l \times f(x)$;
- l'autre de dimension l et $f(x+l)$ qui a pour aire $l \times f(x+l)$.



Sur l'intervalle $[a\,;b]$, l'aire sous la courbe est comprise entre la somme des n rectangles "inférieurs" et la somme des n rectangles "supérieurs".

Voici un algorithme écrit en langage naturel permettant d'obtenir un tel encadrement.

Langage naturel

Définir fonction rectangle(a, b, n)
 	
L ← (b-a)/n
x ← a
m ← 0
p ← 0
 	
Pour i allant de 0 à n-1
    m ← m+Lxf(*x*)
    x ← *x*+L
    p ← p+Lxf(*x*)
FinPour
 	
Afficher m et p

Exemple :
Avec Python, on programme l'algorithme pour la fonction $f(x) = x^2$.

On exécute plusieurs fois le programme pour obtenir un encadrement de l'intégrale de la fonction carré sur [1 ; 2].

```
def rectangle(a,b,n):
    l=(b-a)/n
    x=a
    m=0
    p=0
    for i in range(0,n):
        m=m+l*x**2
        x=x+l
        p=p+l*x**2
    return m,p
```

En augmentant le nombre de sous-intervalles, la précision du calcul s'améliore car l'encadrement formé de rectangles inférieurs et supérieurs se resserre autour de la courbe.

```
>>> rectangle(1,2,10)
(2.1850000000000014, 2.4850000000000017)
>>> rectangle(1,2,50)
(2.3034000000000017, 2.3634000000000017)
>>> rectangle(1,2,100)
(2.318350000000003, 2.3483500000000026)
>>>
```

On vérifie avec un logiciel de calcul formel :

$$\int_1^2 x^2\,dx \qquad \frac{7}{3}$$

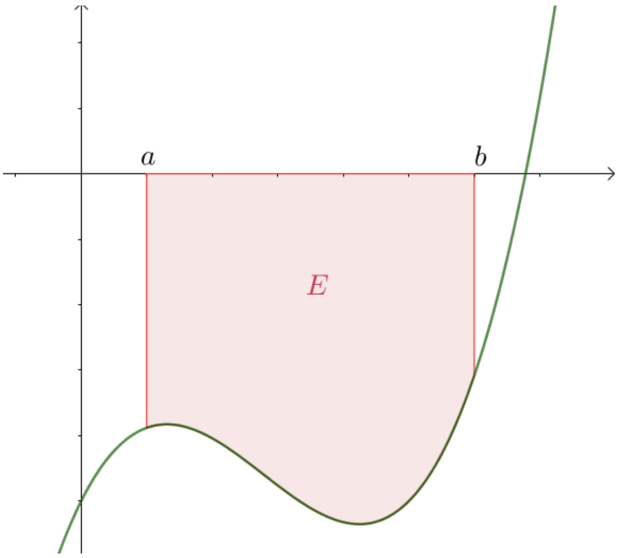
$$\int_1^2 x^2\,dx \qquad 2.33333$$

Calculer une intégrale avec la calculatrice :

Vidéo TI https://youtu.be/0Y3VT73yvVY
Vidéo Casio https://youtu.be/hHxmizmbY_k
Vidéo HP https://youtu.be/4Uu5tQGjbwo

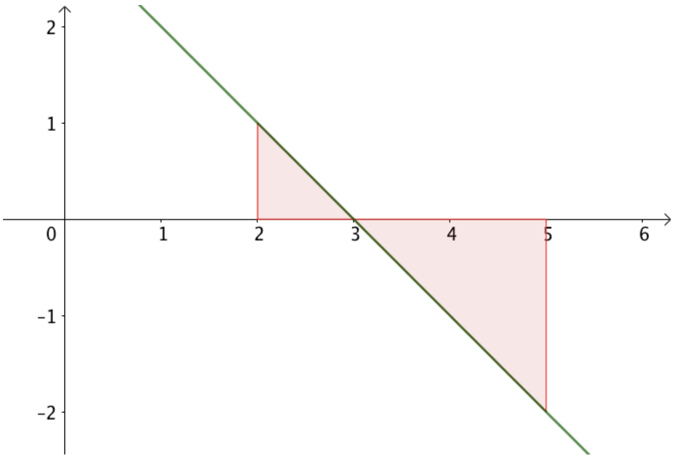
5) Extension aux fonctions de signe quelconque

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.
On appelle **intégrale** de f sur $[a\,;b]$ le nombre $I = \int_a^b f(x)\,dx$ défini par :
- si f est positive sur $[a\,;b]$: $I = Aire(E)$,
- si f est négative sur $[a\,;b]$: $I = -Aire(E)$,
où E est la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Exemple :

$$\int_2^5 3 - x\,dx = \frac{1 \times 1}{2} - \frac{2 \times 2}{2} = -1{,}5$$



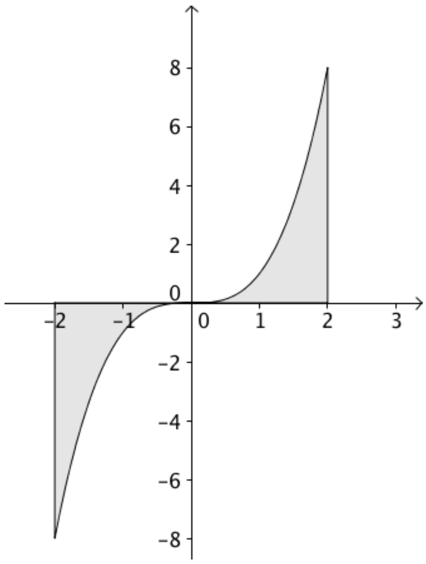
6) Propriétés

Propriétés : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c des réels de I.

a) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

b) $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

c) Relation de Chasles : $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$



Remarque :
Si une intégrale est nulle, alors la fonction n'est pas nécessairement nulle.
Par exemple :

$$\int_{-2}^{2} x^3\,dx = \int_{-2}^{0} x^3\,dx + \int_{0}^{2} x^3\,dx = 0$$

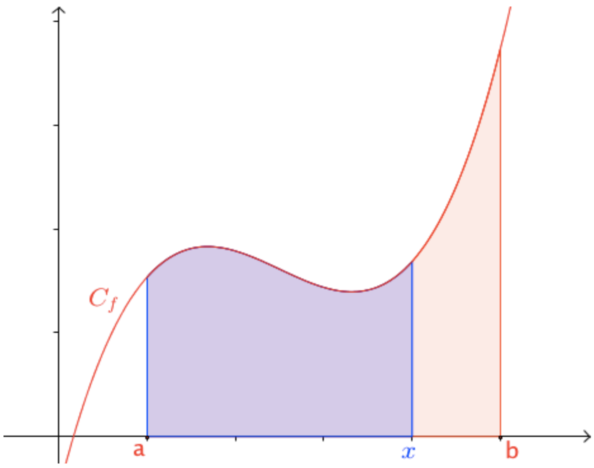
La courbe représentative de la fonction cube est en effet symétrique par rapport à l'origine du repère, donc :

$$\int_{-2}^{0} x^3\,dx = -\int_{0}^{2} x^3\,dx$$

II. Intégrale et primitive

1) Fonction définie par une intégrale

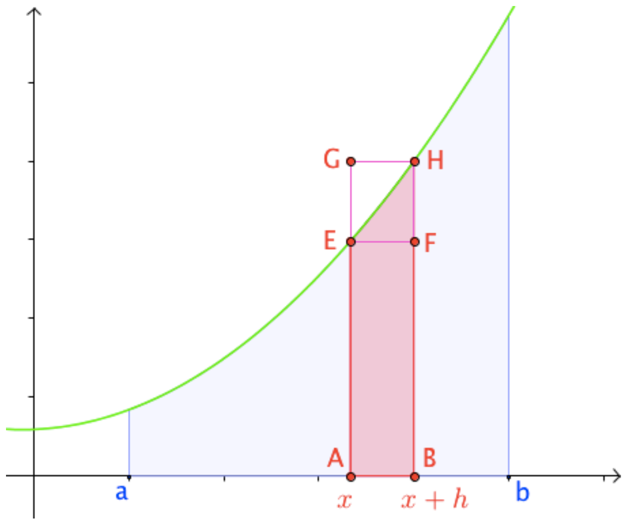
Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.
La fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.



Démonstration au programme dans le cas où f est strictement croissante :

- 1er cas : $h > 0$
On considère deux réels x et $x+h$ de l'intervalle $[a\,;b]$.
On veut démontrer que : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$.

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^{x} f(x)\,dx \\ &= \int_a^{x+h} f(x)\,dx + \int_x^{a} f(x)\,dx \\ &= \int_x^{x+h} f(x)\,dx \end{aligned}$$



On a représenté ci-contre, la courbe de la fonction f (en vert). Cette différence est égale à l'aire de la surface colorée en rouge.

Elle est comprise entre les aires des rectangles ABFE et ABHG.

Or, $Aire(ABFE) = h \times f(x)$ et
$Aire(ABHG) = h \times f(x+h)$.
Comme f est croissante sur $[a\,;b]$, on a :
$h \times f(x) < F(x+h) - F(x) < h \times f(x+h)$
Puisque $h > 0$, on a :
$f(x) < \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} < f(x+h)$
Comme f est continue sur $[a\,;b]$, $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$.
D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$.
Et donc : $F'(x) = f(x)$.
F est donc une primitive de f.
Par ailleurs, F s'annule en a, car $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$.

- <u>2e cas : $h < 0$</u>
La démonstration est analogue (les encadrements sont inversés).

<u>Conséquence immédiate :</u>

<u>Théorème :</u> Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

<u>Méthode :</u> Étudier une fonction définie par une intégrale

Vidéo https://youtu.be/6DHXw5TRzN4

Soit F la fonction définie sur [0 ; 10] par : $F(x) = \int_0^x \frac{t}{2}\,dt$.
a) Étudier les variations de F.
b) Tracer sa courbe représentative.

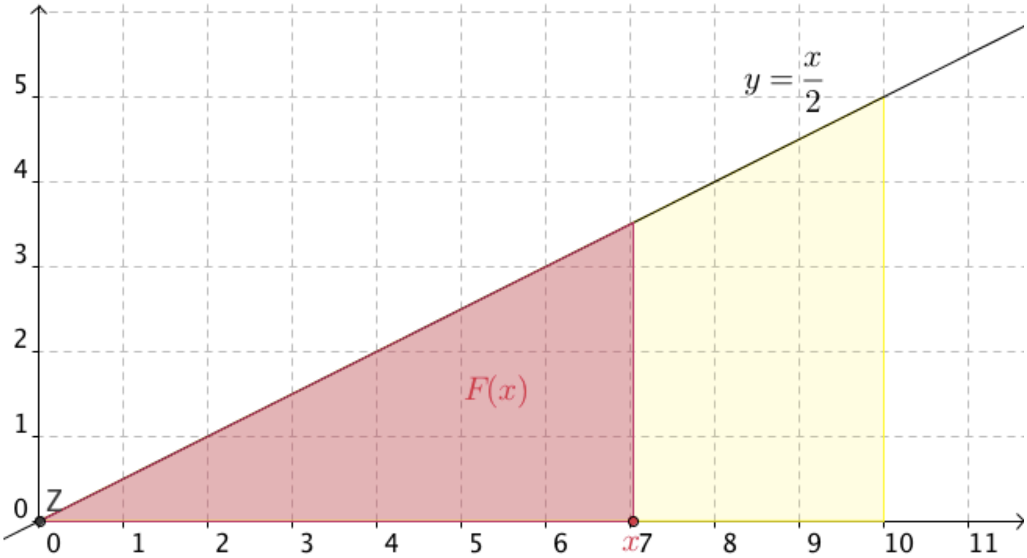
a) $t \longmapsto \frac{t}{2}$ est continue et positive sur [0 ; 10] donc F est dérivable sur [0 ; 10] et
$F'(x) = \frac{x}{2} > 0$.

Donc F est croissante sur [0 ; 10].

On dresse le tableau de variations :

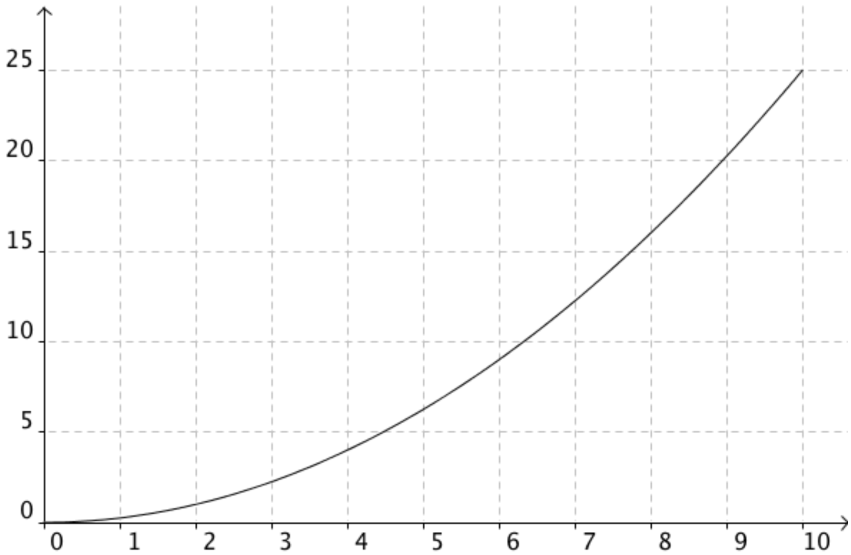
x	0	10
$F'(x)$	+	
$F(x)$	0 ↗	25

$F(x)$ est égal à l'aire du triangle rouge.
Ainsi $F(10) = \frac{10\times5}{2} = 25\ u.a.$



b) Pour tout x de [0 ; 10], on a $F(x) = \frac{x\times\frac{x}{2}}{2} = \frac{x^2}{4}\ u.a.$

On a ainsi la représentation graphique de F :



2) Calcul d'intégrales

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.
Si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Démonstration au programme :
La fonction G définie sur $[a\,;b]$ par $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f sur $[a\,;b]$ d'après le premier théorème du paragraphe II.
Si F est une primitive de f alors pour tout x de $[a\,;\,b]$, on a : $G(x) = F(x) + k,\ k \in \mathbb{R}$.
En effet, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.
De plus, $G(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$ et $G(a) = F(a) + k$ donc $F(a) = -k$ et donc :
$k = -F(a)$.
Or $G(b) = \int_a^b f(t)\,dt = F(b) + k = F(b) - F(a)$.

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I et F une primitive de f sur $[a\,;b]$.
On appelle **intégrale** de f sur $[a\,;b]$ la différence $F(b) - F(a)$.

Notation :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Méthode : Calculer une intégrale à partir d'une primitive

Vidéo https://youtu.be/Z3vKJJE57Uw
Vidéo https://youtu.be/8ci1RrNH1L0
Vidéo https://youtu.be/uVMRZSmYcQE

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_1^4 \frac{3}{x^2}\,dx \qquad B = \int_2^5 3x^2 + 4x - 5\,dx \qquad C = \int_{-1}^1 e^{-2x}\,dx$$

$A = \int_1^4 \frac{3}{x^2}\,dx$

On note : $f(x) = \frac{3}{x^2} = 3 \times \frac{1}{x^2}$

Une primitive de f est F tel que : $F(x) = 3 \times \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{3}{x}$

Donc :

$$A = \int_1^4 \frac{3}{x^2}\,dx = \left[-\frac{3}{x}\right]_1^4 = F(4) - F(1) = -\frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{1}\right) = \frac{9}{4}$$

$B = \int_2^5 3x^2 + 4x - 5\,dx$

$= [x^3 + 2x^2 - 5x]_2^5$

$= 5^3 + 2 \times 5^2 - 5 \times 5 - (2^3 + 2 \times 2^2 - 5 \times 2) = 144$

$C = \int_{-1}^{1} e^{-2x}\, dx$

On note : $f(x) = e^{-2x} = \frac{1}{-2}(-2)e^{-2x}$

Une primitive de f est F tel que : $F(x) = \frac{1}{-2}e^{-2x}$

Donc :

$$C = \int_{-1}^{1} e^{-2x}\, dx = \left[\frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_{-1}^{1} = F(1) - F(-1)$$

$$= \frac{1}{-2}e^{-2\times 1} - \frac{1}{-2}e^{-2\times(-1)}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}e^{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{2} - \frac{1}{e^{2}}\right)$$

3) Propriété de linéarité

Propriété : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I.

a) Pour k réel, $\int_a^b kf(x)\, dx = k\int_a^b f(x)\, dx$

b) $\int_a^b f(x) + g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$

Éléments de démonstration :

On applique les propriétés sur les primitives :

- kF est une primitive de kf
- $F + G$ est une primitive de $f + g$

Méthode : Calculer une intégrale en appliquant la linéarité

Vidéo https://youtu.be/B9n_AArwjKw

On pose : $A = \int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx$ et $B = \int_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx$

a) Calculer $A + B$ et $A - B$.

b) En déduire A et B.

a) On calcule en appliquant les formules de linéarité :

$$A + B = \int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx + \int_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 x + \sin^2 x\, dx$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\, dx$$

$$A - B = \int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx - \int_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 x - \sin^2 x\, dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos 2x\, dx$$

$= [x]_0^{2\pi}$

$= 2\pi$

$= \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{2\pi}$

$= \frac{1}{2}\sin(2\times 2\pi) - \frac{1}{2}\sin(2\times 0) = 0$

b) On a ainsi :
$\begin{cases} A+B=2\pi \\ A-B=0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} 2A=2\pi \\ A=B \end{cases}$ soit : $A=B=\pi$

4) Inégalités

Propriétés : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I avec $a \leq b$.
a) Si, pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
b) Si, pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

Démonstration :
a) Par définition, lorsque f est positive, l'intégrale de f est une aire donc est positive.
b) Si $f(x) \geq g(x)$ alors $f(x) - g(x) \geq 0$.
Donc en appliquant a), on a : $\int_a^b f(x) - g(x)\,dx \geq 0$.
Par linéarité, on a $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geq 0$ et donc $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

Méthode : Encadrer une intégrale

Vidéo https://youtu.be/VK0PvzWBIso

a) Démontrer que pour tout x de [0 ; 1], on a : $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.
b) En déduire que : $0 \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq e-1$.

a) Sur [0 ; 1], $x^2 \leq x$.
Comme la fonction exponentielle est croissante et positive sur $\mathbb{R}$, on a : $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b) On déduit de la question précédente que :

$$\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq \int_0^1 e^x\,dx$$

$$\int_0^1 0\,dx = 0 \text{ et } \int_0^1 e^x\,dx = [e^x]_0^1 = e-1$$

D'où : $0 \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq e-1$.