

CALCUL INTÉGRAL – Chapitre 1/2

▶ Tout le cours en vidéo : <https://youtu.be/pFKzXZrMVxs>



En 1696, Jacques Bernoulli reprend le mot latin « integer », déjà utilisé au XIV^e siècle, pour désigner le calcul intégral. A cette époque, on partait de l'équation de la courbe pour calculer l'aire sous la courbe, c'est à dire du « bord » de la surface à la surface entière (intégrale).

Au milieu du XIX^e siècle, les sciences sociales reprennent le mot pour exprimer l'idée qu'une personne s'intègre à un groupe.

Partie 1 : Intégrale et aire

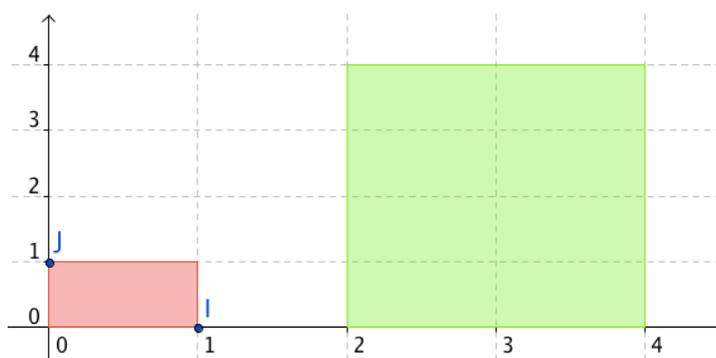
1) Unité d'aire

Dans le repère (O, I, J) , le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1. Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire **1 unité d'aire**. On écrit **1 u.a.**

L'aire du rectangle vert est égale à 8 fois l'aire du rectangle rouge.

L'aire du rectangle vert est donc égale à **8 u.a.**

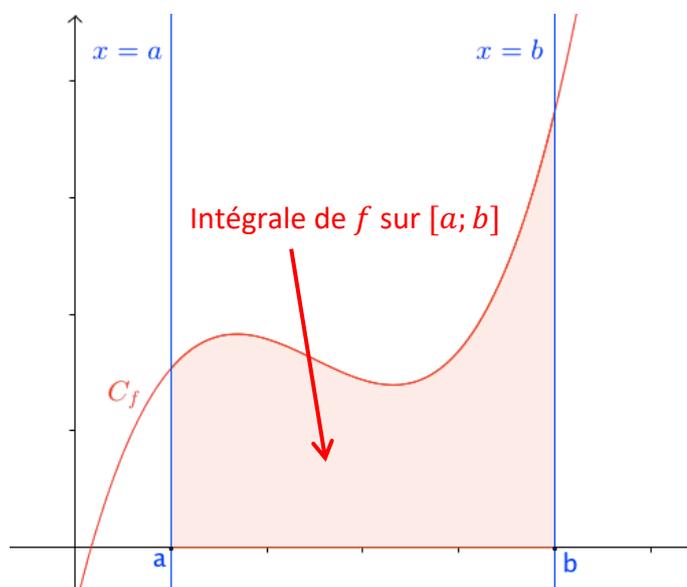
Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm^2 par exemple).



2) Définition

Définition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.

On appelle **intégrale** de f sur $[a ; b]$ l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



3) Notation

L'intégrale de la fonction f sur $[a ; b]$ se note :

$$\int_a^b f(x) dx$$

Et on lit « intégrale de a à b de $f(x) dx$ ».

Remarques :

- a et b sont appelés les **bornes d'intégration**.
- x est la **variable d'intégration**. Elle peut être remplacée par toute autre lettre qui n'intervient pas par ailleurs.

Ainsi on peut écrire : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

" dx " ou " dt " nous permet de reconnaître la variable d'intégration.



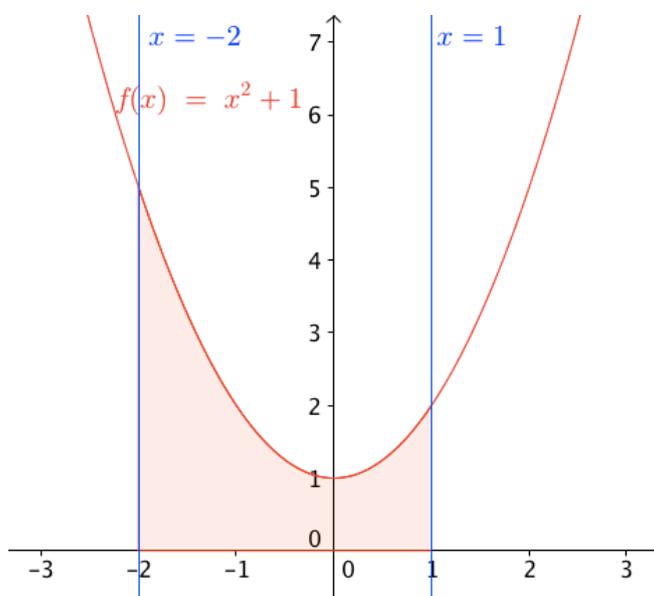
Cette notation est due au mathématicien allemand *Gottfried Wilhelm von Leibniz* (1646 ; 1716). Ce symbole fait penser à un "S" allongé et s'explique par le fait que l'intégral est égal à une aire calculée comme somme infinie d'autres aires.

Plus tard, un second mathématicien allemand, *Bernhard Riemann* (1826 ; 1866) établit une théorie aboutie du calcul intégral.

Exemple :

L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$ est l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 1]$ et se note :

$$\int_{-2}^1 x^2 + 1 dx$$



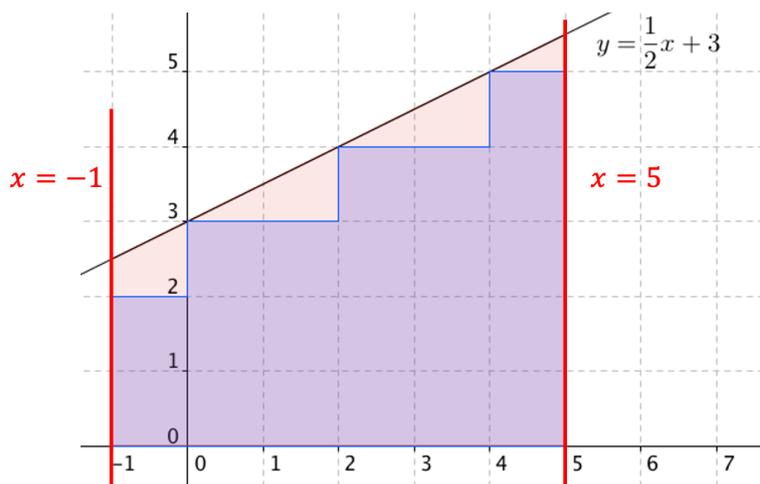
Méthode : Déterminer une intégrale par calculs d'aire (1)

 Vidéo <https://youtu.be/jkxNKkmEXZA>

- a) Tracer la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ dans un repère orthonormé.
- b) Calculer $\int_{-1}^5 f(x) dx$.

Correction

a)



- b) Calculer $\int_{-1}^5 f(x) dx$ revient à calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 5$.

Donc par dénombrement, on obtient : $\int_{-1}^5 f(x) dx = 21 \text{ u. a.} + 3 \text{ u. a.} = 24 \text{ u. a.}$

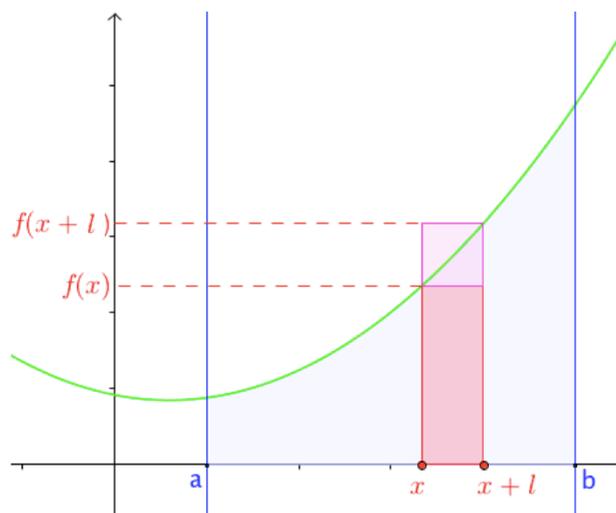
4) Encadrement de l'intégrale d'une fonction monotone et positive

Soit une fonction f continue, positive et monotone sur un intervalle $[a ; b]$.

On partage l'intervalle $[a ; b]$ en n sous-intervalles de même amplitude $l = \frac{b-a}{n}$.

Sur un sous-intervalle $[x ; x + l]$, l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire de deux rectangles :

- l'un de dimension l et $f(x)$ qui a pour aire : $l \times f(x)$;
- l'autre de dimension l et $f(x + l)$ qui a pour aire $l \times f(x + l)$.



Sur l'intervalle $[a ; b]$, l'aire sous la courbe est comprise entre la somme des n rectangles "inférieurs" et la somme des n rectangles "supérieurs".

Voici un algorithme écrit en langage naturel permettant d'obtenir un tel encadrement :

Langage naturel
Définir fonction rectangle(a, b, n)
$L \leftarrow (b-a)/n$
$x \leftarrow a$
$m \leftarrow 0$
$p \leftarrow 0$
Pour i allant de 0 à n-1
$m \leftarrow m+Lx f(x)$
$x \leftarrow x+L$
$p \leftarrow p+Lx f(x)$
FinPour
Afficher m et p

```
def rectangle(a,b,n):
    l=(b-a)/n
    x=a
    m=0
    p=0
    for i in range(0,n):
        m=m+l*x**2
        x=x+l
        p=p+l*x**2
    return m,p
```

Exemple :

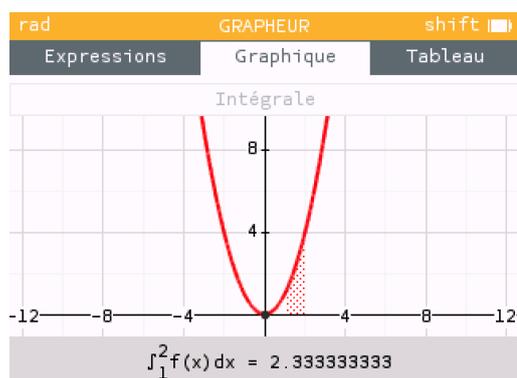
Avec Python, on programme cet algorithme pour la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[1 ; 2]$.

On exécute plusieurs fois le programme pour obtenir un encadrement de l'intégrale de la fonction carré sur $[1 ; 2]$.

```
>>> rectangle(1,2,10)
(2.1850000000000014, 2.4850000000000017)
>>> rectangle(1,2,50)
(2.3034000000000017, 2.3634000000000017)
>>> rectangle(1,2,100)
(2.3183500000000003, 2.3483500000000026)
>>>
```

On en déduit que : $2,31 < \int_1^2 x^2 dx < 2,35$

Il est possible de vérifier avec la calculatrice :



Calculer une intégrale avec la calculatrice :

▶ Vidéo TI <https://youtu.be/OY3VT73yvVY>

▶ Vidéo Casio https://youtu.be/hHxmizmbY_k

▶ Vidéo HP <https://youtu.be/4Uu5tQGjwbo>

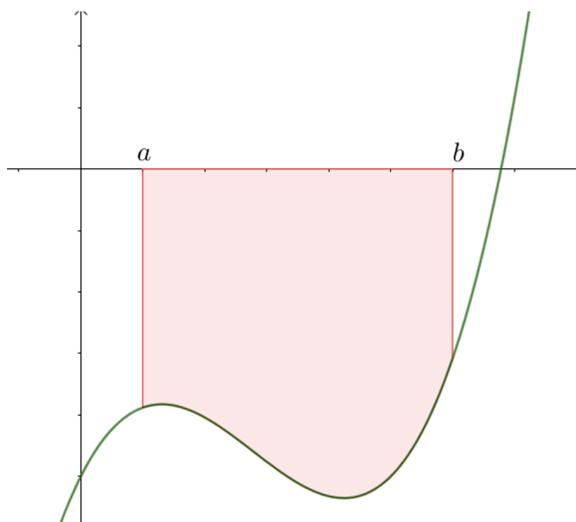
5) Extension aux fonctions de signe quelconque

Propriété : Soit f une fonction continue et NÉGATIVE sur un intervalle $[a ; b]$.

L'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par :

- la courbe représentative de la fonction f ,
 - l'axe des abscisses,
 - et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$
- est égale à :

$$-\int_a^b f(x) dx$$



Propriétés sur les bornes d'intégration :

a) $\int_a^a f(x) dx = 0$

b) $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$

c) Relation de Chasles : $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

Méthode : Déterminer une intégrale par calculs d'aire (2)

▶ Vidéo <https://youtu.be/l2zuaZukc0g>

Représenter la droite d'équation $y = 3 - x$ dans un repère.

En déduire $\int_2^5 3 - x dx$ en effectuant des calculs d'aire.

Correction

La droite d'équation $y = 3 - x$ coupe l'axe des abscisses en $x = 3$.

Donc, $3 - x \geq 0$ sur l'intervalle $[2 ; 3]$

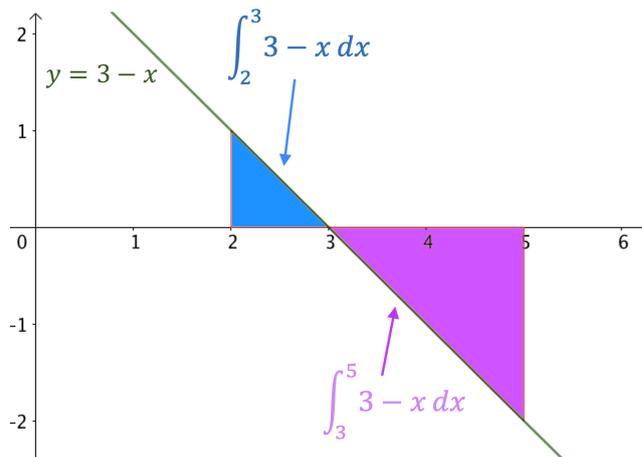
Et, $3 - x \leq 0$ sur l'intervalle $[3 ; 5]$.

D'après la relation de Chasles, on a :

$$\int_2^5 3 - x \, dx = \int_2^3 3 - x \, dx + \int_3^5 3 - x \, dx$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_2^5 3 - x \, dx &= \frac{1 \times 1}{2} + \left(-\frac{2 \times 2}{2}\right) \\ &= -1,5 \end{aligned}$$



Remarque :

Si une intégrale est nulle, alors la fonction n'est pas nécessairement nulle.

On a par exemple :

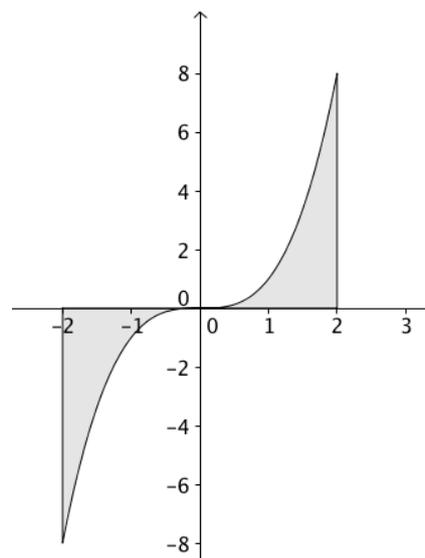
$$\int_{-2}^2 x^3 \, dx = 0$$

En effet, la courbe représentative de la fonction cube est symétrique par rapport à l'origine du repère, donc :

$$\int_{-2}^0 x^3 \, dx = -\int_0^2 x^3 \, dx$$

Et donc :

$$\int_{-2}^2 x^3 \, dx = \int_{-2}^0 x^3 \, dx + \int_0^2 x^3 \, dx = 0$$



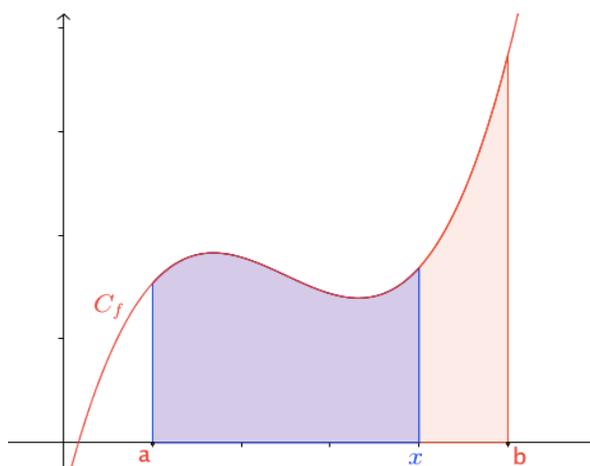
Partie 2 : Intégrale et primitive

1) Fonction définie par une intégrale

Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$.

La fonction F définie sur $[a ; b]$ par :

$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ est la primitive de f qui s'annule en a .



Démonstration au programme dans le cas où f est strictement croissante :

► Vidéo <https://youtu.be/p2W6FYBxTlo>

- 1^{er} cas : $h > 0$

On considère deux réels x et $x + h$ de l'intervalle $[a ; b]$.

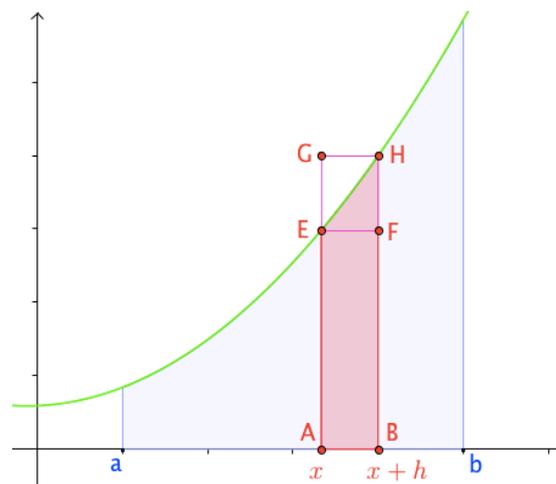
On veut démontrer que : $F'(x) = f(x)$, soit : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_a^{x+h} f(t) dt + \int_x^a f(t) dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t) dt \end{aligned}$$

On a représenté ci-contre, la courbe de la fonction f (en vert).

Cette différence est égale à l'aire de la surface colorée en rouge.

Elle est comprise entre les aires des rectangles ABFE et ABHG.



Or, $\text{Aire}(ABFE) = h \times f(x)$ et

$\text{Aire}(ABHG) = h \times f(x+h)$.

Comme f est croissante sur $[a ; b]$, on a :

$h \times f(x) < F(x+h) - F(x) < h \times f(x+h)$

Puisque $h > 0$, on a :

$$f(x) < \frac{F(x+h) - F(x)}{h} < f(x+h)$$

Comme f est continue sur $[a ; b]$, $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

Et donc : $F'(x) = f(x)$.

F est donc une primitive de f .

Par ailleurs, F s'annule en a , car $F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$.

- 2^e cas : $h < 0$

La démonstration est analogue (les encadrements sont inversés).

Conséquence immédiate :

Théorème : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Méthode : Étudier une fonction définie par une intégrale

► Vidéo <https://youtu.be/6DHXw5TRzN4>

Soit F la fonction définie sur $[0 ; 10]$ par : $F(x) = \int_0^x \frac{t}{2} dt$.

a) Étudier les variations de F .

b) Tracer sa courbe représentative.

Correction

a) $t \mapsto \frac{t}{2}$ est continue et positive sur $[0 ; 10]$ donc F est dérivable sur $[0 ; 10]$ et $F'(x) = \frac{x}{2} \geq 0$.

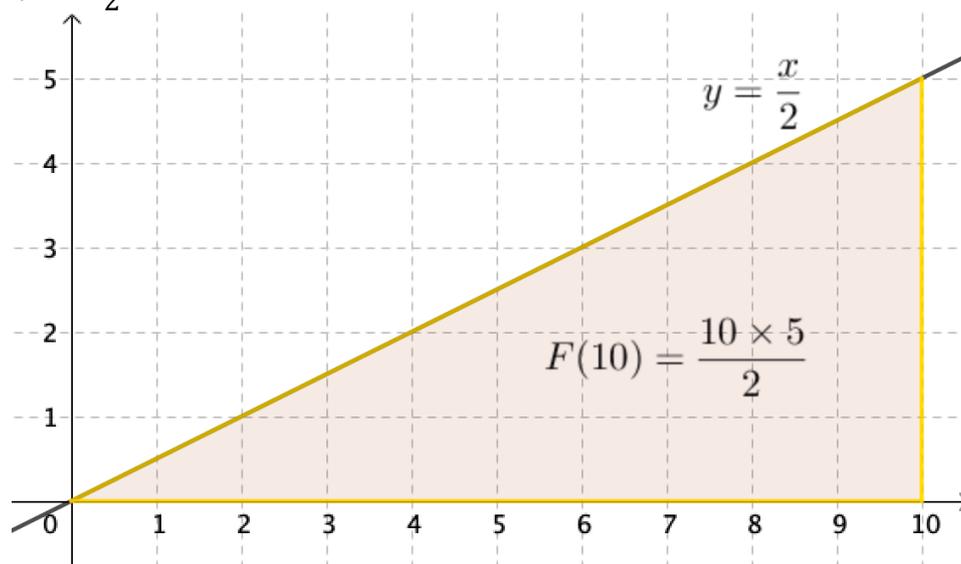
Donc F est croissante sur $[0 ; 10]$.

On dresse le tableau de variations :

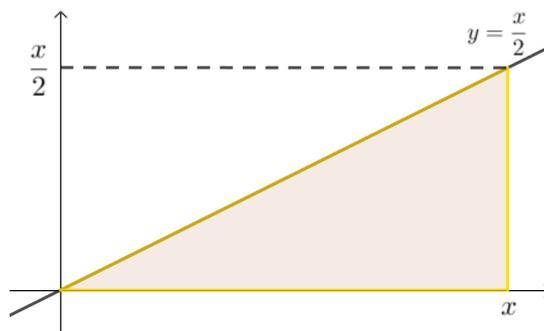
x	0	10
$F'(x)$	+	
$F(x)$	0	25

$F(x)$ est égal à l'aire du triangle rouge.

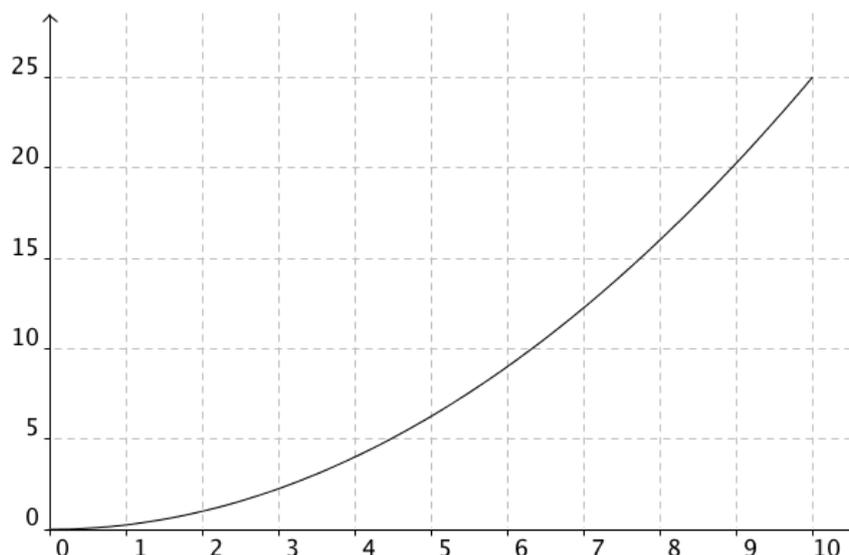
Ainsi $F(10) = \frac{10 \times 5}{2} = 25 \text{ u. a.}$



b) Pour tout x de $[0 ; 10]$, on a $F(x) = \frac{x \times \frac{x}{2}}{2} = \frac{x^2}{4} \text{ u. a.}$



On a ainsi la représentation graphique de F :



2) Calcul d'intégrales

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$.

Si F est une primitive de f alors :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Démonstration au programme :

▶ Vidéo <https://youtu.be/S3reCPS4dq4>

La fonction G définie sur $[a ; b]$ par $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur $[a ; b]$ d'après le premier théorème du paragraphe II.

Si F est une primitive de f alors pour tout x de $[a ; b]$, on a : $G(x) = F(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

En effet, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

De plus, $G(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$ et $G(a) = F(a) + k$ donc $F(a) = -k$ et donc :

$$k = -F(a).$$

$$\text{Or } G(b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) + k = F(b) - F(a).$$

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels de I et F une primitive de f sur $[a ; b]$.

On appelle **intégrale** de f sur $[a ; b]$ la différence $F(b) - F(a)$.

Notation :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Méthode : Calculer une intégrale à partir d'une primitive

▶ Vidéo <https://youtu.be/Z3vKJJE57Uw>

▶ Vidéo <https://youtu.be/8ci1RrNH1L0>

▶ Vidéo <https://youtu.be/uVMRZSmYcQE>

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_1^4 \frac{3}{x^2} dx \qquad B = \int_2^5 3x^2 + 4x - 5 dx \qquad C = \int_{-1}^1 e^{-2x} dx$$

Correction

$$A = \int_1^4 \frac{3}{x^2} dx$$

$$\text{On a : } f(x) = \frac{3}{x^2} = 3 \times \frac{1}{x^2}$$

Une primitive de f est la fonction F telle que : $F(x) = 3 \times \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{3}{x}$

Donc :

$$A = \int_1^4 \frac{3}{x^2} dx = \left[-\frac{3}{x}\right]_1^4 = F(4) - F(1) = -\frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{1}\right) = \frac{9}{4}$$

$$B = \int_2^5 3x^2 + 4x - 5 dx$$

$$= [x^3 + 2x^2 - 5x]_2^5$$

$$= 5^3 + 2 \times 5^2 - 5 \times 5 - (2^3 + 2 \times 2^2 - 5 \times 2) = 144$$

$$C = \int_{-1}^1 e^{-2x} dx$$

$$\text{On a : } f(x) = e^{-2x} = \frac{1}{-2}(-2)e^{-2x}$$

Une primitive de f est la fonction F telle que : $F(x) = \frac{1}{-2}e^{-2x}$

Donc :

$$C = \int_{-1}^1 e^{-2x} dx = \left[\frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_{-1}^1 = F(1) - F(-1)$$

$$= \frac{1}{-2}e^{-2 \times 1} - \frac{1}{-2}e^{-2 \times (-1)}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}e^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)$$

Partie 3 : Propriétés des intégrales

1) Propriété de linéarité

Propriété :

$$\text{a) Pour } k \text{ réel, } \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{b) } \int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Éléments de démonstration :

On applique les propriétés sur les primitives :

- kF est une primitive de kf
- $F + G$ est une primitive de $f + g$

Méthode : Calculer une intégrale en appliquant la linéarité

▶ Vidéo https://youtu.be/B9n_AArwjKw

On pose : $A = \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx$ et $B = \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx$

a) Calculer $A + B$ et $A - B$.

On donne : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ et $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$

b) En déduire A et B .

Correction

a) On calcule en appliquant les formules de linéarité :

$$\begin{aligned}
 A + B &= \int_0^{2\pi} \cos^2(x) \, dx + \int_0^{2\pi} \sin^2(x) \, dx & A - B &= \int_0^{2\pi} \cos^2(x) \, dx - \int_0^{2\pi} \sin^2(x) \, dx \\
 &= \int_0^{2\pi} \cos^2(x) + \sin^2(x) \, dx & &= \int_0^{2\pi} \cos^2(x) - \sin^2(x) \, dx \\
 &= \int_0^{2\pi} 1 \, dx & &= \int_0^{2\pi} \cos(2x) \, dx \\
 &= [x]_0^{2\pi} & &= \left[\frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^{2\pi} \\
 &= 2\pi & &= \frac{1}{2} \sin(2 \times 2\pi) - \frac{1}{2} \sin(2 \times 0) = 0
 \end{aligned}$$

b) On a ainsi :

$$\begin{cases} A + B = 2\pi \\ A - B = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} 2A = 2\pi \\ A = B \end{cases} \text{ soit : } A = B = \pi$$

2) Positivité et comparaison**Propriétés :**

a) Si, pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$

b) Si, pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b g(x) \, dx$

Démonstration :

a) Par définition, lorsque f est positive, l'intégrale de f est une aire donc est positive.

b) Si $f(x) \geq g(x)$ alors $f(x) - g(x) \geq 0$.

Donc en appliquant a), on a : $\int_a^b f(x) - g(x) \, dx \geq 0$.

Par linéarité, on a $\int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx \geq 0$ et donc $\int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b g(x) \, dx$.

Méthode : Encadrer une intégrale

 Vidéo <https://youtu.be/VKOPvzWBIs0>

- a) Démontrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, on a : $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.
 b) En déduire que : $0 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1$.

Correction

a) Sur $[0 ; 1]$, $x^2 \leq x$.

Comme la fonction exponentielle est croissante et positive sur \mathbb{R} , on a : $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b) On déduit de la question précédente que :

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq \int_0^1 e^x dx$$

$$\int_0^1 0 dx = 0 \text{ et } \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1$$

D'où : $0 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1$.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales