

# CALCUL INTÉGRAL – Chapitre 2/2

▶ Tout le cours en vidéo : <https://youtu.be/pFKzXZrMVxs>

## Partie 1 : Intégration par parties

**Théorème :** Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur  $[a ; b]$ . Alors, on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

**Démonstration au programme :**

▶ Vidéo <https://youtu.be/v3Tdlldu0sgk>

$uv$  est dérivable sur  $[a ; b]$  et on a :  $(uv)' = u'v + uv'$

Les fonctions  $uv'$ ,  $u'v$  et  $(uv)'$  sont continues sur  $[a ; b]$ , donc :

$$\begin{aligned} [u(x)v(x)]_a^b &= \int_a^b (uv)'(x) dx \\ &= \int_a^b (u'v + uv')(x) dx \\ &= \int_a^b (u'v)(x) dx + \int_a^b (uv')(x) dx \\ &= \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx \end{aligned}$$

D'où :

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

**Méthode :** Calculer une intégrale en intégrant par parties

▶ Vidéo <https://youtu.be/uNlpYeaNfsg>

▶ Vidéo <https://youtu.be/vNQeSEb2mj8>

▶ Vidéo <https://youtu.be/xbb3vnzF3EA>

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx \quad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x) dx \quad C = \int_1^{e^2} \ln(x) dx$$

**Correction**

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx$$

$v$   $u'$

▶ Ce choix n'est pas anodin ! L'idée est ici de ne plus laisser le facteur  $x$  dans l'expression qu'il restera à intégrer. Il faudrait donc dériver  $x$ .

On pose :  $v(x) = x \rightarrow v'(x) = 1$   
 $u'(x) = \sin(x) \rightarrow u(x) = -\cos(x)$

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x) v(x) dx = [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x) dx \\ &= [-\cos(x) \times x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x) \times 1 dx \\ &= [-x \cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx \\ &= -\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0 \times \cos(0) + [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1 \end{aligned}$$

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x^2}_v \underbrace{\cos(x)}_{u'} dx$$

On pose :  $v(x) = x^2 \rightarrow v'(x) = 2x$   
 $u'(x) = \cos(x) \rightarrow u(x) = \sin(x)$

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned} B &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x) v(x) dx = [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x) dx \\ &= [\sin(x) \times x^2]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \times 2x dx \\ &= [x^2 \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx \end{aligned}$$

Or, dans le terme de droite, on reconnaît l'intégrale  $A$  de la question précédente qui a été calculée par parties. Il s'agit ici d'une **double intégration par parties**.

On a donc :

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0^2 \sin(0) - 2 \times 1 \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2 \end{aligned}$$

$$C = \int_1^{e^2} \underbrace{1}_{u'} \times \underbrace{\ln(x)}_v dx$$

On pose :  $v(x) = \ln(x) \rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$   
 $u'(x) = 1 \rightarrow u(x) = x$

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned} C &= \int_1^{e^2} u'(x) v(x) dx = [u(x)v(x)]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} u(x)v'(x) dx \\ &= [x \ln(x)]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x \frac{1}{x} dx \\ &= e^2 \ln(e^2) - 1 \ln(1) - \int_1^{e^2} 1 dx \\ &= e^2 \times 2 \ln(e) - [x]_1^{e^2} \\ &= e^2 \times 2 - e^2 + 1 \\ &= e^2 + 1 \end{aligned}$$

## Partie 2 : Applications du calcul intégral

### 1) Aire délimitée par deux courbes

**Méthode :** Calculer l'aire délimitée par les courbes de deux fonctions continues et positives

**Vidéo** <https://youtu.be/oRSAYNwUiHQ>

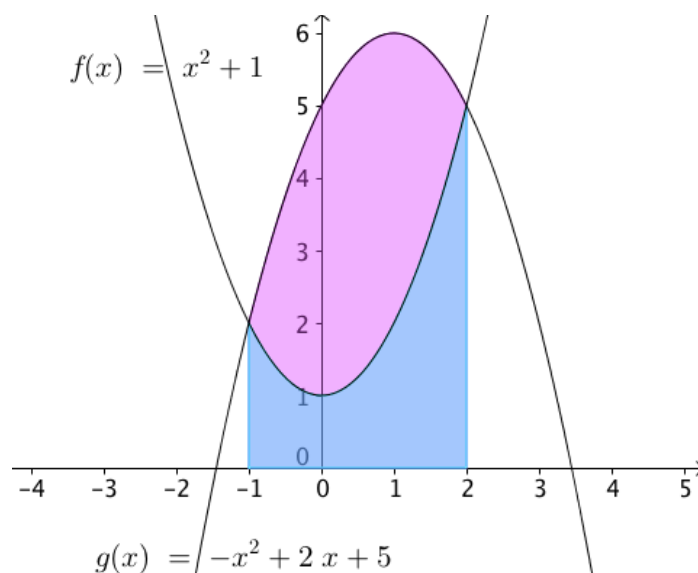
On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies par  $f(x) = x^2 + 1$  et  $g(x) = -x^2 + 2x + 5$ .  
 On admet que pour tout  $x$  de  $[-1 ; 2]$ , on a  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ .  
 Déterminer l'aire délimitée par les courbes représentatives de  $f$  et de  $g$  sur l'intervalle  $[-1 ; 2]$ .

#### Correction

On calcule la différence de l'aire sous la courbe représentative de  $g$  et de l'aire sous la courbe représentative de  $f$ .  
 Cela revient à calculer la différence des intégrales :

$$A = \int_{-1}^2 g(x) dx - \int_{-1}^2 f(x) dx$$

$$\begin{aligned} I_g &= \int_{-1}^2 g(x) dx \\ &= \int_{-1}^2 -x^2 + 2x + 5 dx \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \left[ -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 5x \right]_{-1}^2 \\
&= -\frac{1}{3} \times 2^3 + 2^2 + 5 \times 2 - \left( -\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 + 5 \times (-1) \right) \\
&= 15
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_f &= \int_{-1}^2 f(x) dx \\
&= \int_{-1}^2 x^2 + 1 dx \\
&= \left[ \frac{1}{3}x^3 + x \right]_{-1}^2 \\
&= \frac{1}{3} \times 2^3 + 2 - \left( \frac{1}{3}(-1)^3 + (-1) \right) \\
&= 6
\end{aligned}$$

Donc :  $A = I_g - I_f = 15 - 6 = 9 \text{ u. a.}$

Remarque : Une autre méthode, un peu plus rapide, consisterait à utiliser la linéarité de l'intégrale.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^2 g(x) dx - \int_{-1}^2 f(x) dx \\
&= \int_{-1}^2 -x^2 + 2x + 5 dx - \int_{-1}^2 x^2 + 1 dx \\
&= \int_{-1}^2 -x^2 + 2x + 5 - x^2 - 1 dx \\
&= \int_{-1}^2 -2x^2 + 2x + 4 dx = \dots = 9
\end{aligned}$$

## 2) Valeur moyenne d'une fonction

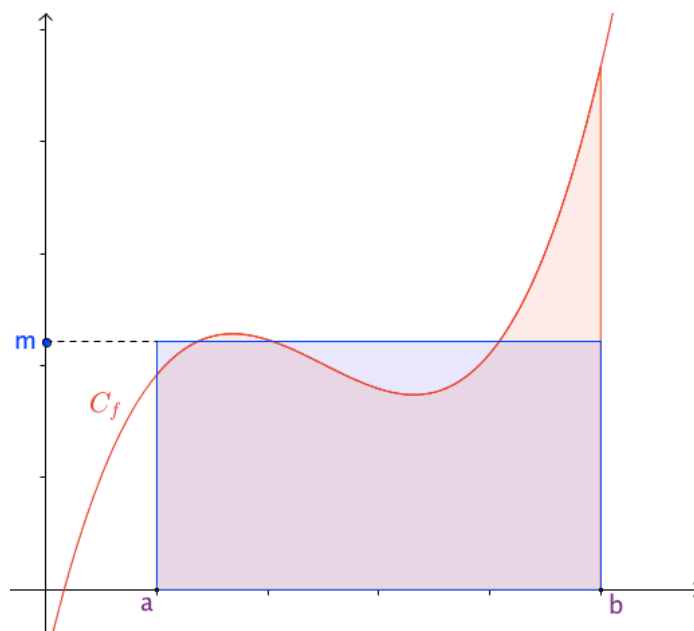
Définition : Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a ; b]$  avec  $a \neq b$ .

On appelle **valeur moyenne** de  $f$  sur  $[a ; b]$  le nombre réel :

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Interprétation géométrique :

L'aire sous la courbe représentative de  $f$  (**en rouge ci-dessous**) est égale à l'aire sous la droite d'équation  $y = m$  (**en bleu**), entre  $a$  et  $b$ .

**Exemple :**

Calculons la valeur moyenne de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$  sur l'intervalle  $[1 ; 10]$ .

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{1}{10 - 1} \int_1^{10} 3x^2 - 4x + 5 \, dx \\
 &= \frac{1}{9} [x^3 - 2x^2 + 5x]_1^{10} \\
 &= \frac{1}{9} ((10^3 - 2 \times 10^2 + 5 \times 10) - (1^3 - 2 \times 1^2 + 5 \times 1)) = \frac{1}{9} (850 - 4) = \frac{846}{9} = 94
 \end{aligned}$$

**Méthode :** Calculer la valeur moyenne d'une fonction

📺 Vidéo <https://youtu.be/oVFHojz5y50>

On modélise, à l'aide d'une fonction, le nombre de malades lors d'une épidémie.

Au  $x$ -ième jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égal à

$$f(x) = 16x^2 - x^3.$$

Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.

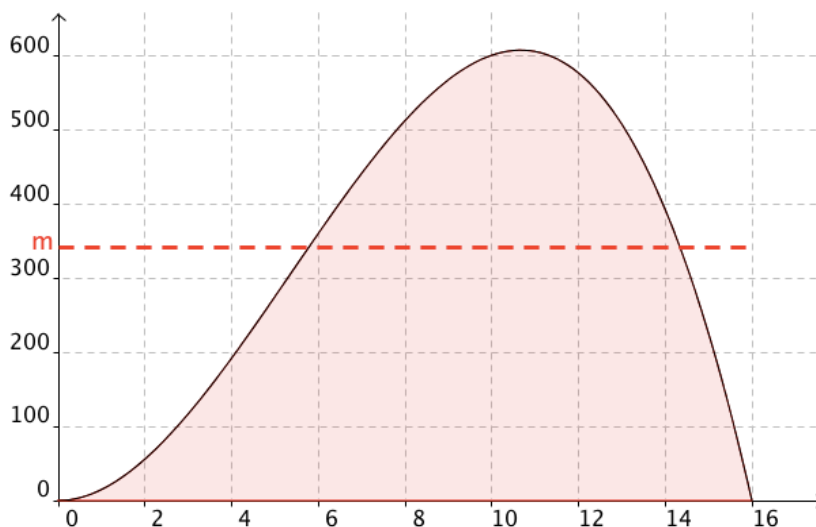
**Correction**

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{1}{16 - 0} \int_0^{16} f(x) \, dx \\
 &= \frac{1}{16} \int_0^{16} 16x^2 - x^3 \, dx \\
 &= \frac{1}{16} \left[ \frac{16}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^{16}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{16} \left( \frac{16}{3} \times 16^3 - \frac{1}{4} \times 16^4 \right)$$

$$= \frac{1024}{3} \approx 341$$

Le nombre moyen de malades chaque jour est environ égal à 341.



### 3) Intégrales et suites

Méthode : Étudier une suite d'intégrales

 Vidéo <https://youtu.be/8I0jA4lCKM>

On considère la suite d'intégrales  $(I_n)$  définie pour tout entier  $n$ , par :

$$I_n = \int_1^e x (\ln(x))^n dx$$

a) Calculer  $I_0$ .

b) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que :  $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$

c) A l'aide d'un programme écrit en Python, conjecturer la limite de la suite  $(I_n)$ .

#### Correction

a) Pour  $n = 0$ , on a :

$$I_0 = \int_1^e x dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_1^e = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} 1^2 = \frac{e^2 - 1}{2}$$

b) L'objectif est d'exprimer  $I_{n+1}$  en fonction de  $I_n$ .

$$I_{n+1} = \int_1^e \underset{u'}{x} (\ln(x))^{n+1} \underset{v}{dx}$$

On pose :  $v(x) = (\ln(x))^{n+1} \rightarrow v'(x) = (n+1) \times \frac{1}{x} \times (\ln(x))^n$   
 $u'(x) = x \rightarrow u(x) = \frac{1}{2}x^2$

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e u'(x) v(x) dx = [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u(x)v'(x) dx \\ &= \left[ \frac{1}{2}x^2 (\ln(x))^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2 (n+1) \times \frac{1}{x} \times (\ln(x))^n dx \\ &= \frac{1}{2}e^2 (\ln(e))^{n+1} - \frac{1}{2} \times 1^2 (\ln(1))^{n+1} - \frac{n+1}{2} \int_1^e x (\ln(x))^n dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n \end{aligned}$$

Donc :

$$I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$$

```
c) from math import*
def integ(n):
    I=(e**2-1)/2
    for k in range(1,n+1):
        I=e**2/2-k*I/2
    return I
>>> integ(5)
0.951367987633668
>>> integ(10)
0.5748317309902866
>>> integ(30)
39275840.04973485
>>> integ(100)
1.170494462774085e+112
```

On conjecture que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$

**Remarque :** En fait cette conjecture n'est pas exacte !

Pour en savoir plus, regarder ceci : <https://youtu.be/810jA4lClKM?t=831>

Cela devrait démarrer à 13:56.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)