CALCUL INTÉGRAL – Chapitre 2/2

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/pFKzXZrMVxs

Partie 1 : Intégration par parties

Théorème : Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a\,;b]$. Alors, on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/v3TdIdu0sgk

uv est dérivable sur $[a\,;b]$ et on a : $(uv)' = u'v + uv'$
Les fonctions uv', $u'v$ et $(uv)'$ sont continues sur $[a\,;b]$, donc :

$$\begin{aligned}[u(x)v(x)]_a^b &= \int_a^b (uv)'(x)\,dx \\ &= \int_a^b (u'v+uv')(x)\,dx \\ &= \int_a^b (u'v)(x)\,dx + \int_a^b (uv')(x)\,dx \\ &= \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx\end{aligned}$$

D'où :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

Méthode : Calculer une intégrale en intégrant par parties

Vidéo https://youtu.be/uNIpYeaNfsg
Vidéo https://youtu.be/vNQeSEb2mj8
Vidéo https://youtu.be/xbb3vnzF3EA

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,dx \qquad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(x)\,dx \qquad C = \int_1^{e^2} \ln(x)\,dx$$

Correction

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underset{v}{x}\,\underset{u'}{\sin(x)}\,dx$$

➽ *Ce choix n'est pas anodin ! L'idée est ici de ne plus laisser le facteur x dans l'expression qu'il restera à intégrer.* Il faudrait donc dériver x.

On pose : $v(x) = x \quad \rightarrow \quad v'(x) = 1$
$u'(x) = \sin(x) \quad \rightarrow \quad u(x) = -\cos(x)$

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)\, v(x) dx = [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x)\, dx$$
$$= [-\cos(x) \times x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x) \times 1\, dx$$
$$= [-x\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx$$
$$= -\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0 \times \cos(0) + [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1$$

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x^2}_{v}\, \underbrace{\cos(x)}_{u'}\, dx$$

On pose : $v(x) = x^2 \quad \rightarrow \quad v'(x) = 2x$
$u'(x) = \cos(x) \quad \rightarrow \quad u(x) = \sin(x)$

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)\, v(x) dx = [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x)\, dx$$
$$= [\sin(x) \times x^2]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \times 2x\, dx$$
$$= [x^2\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\, dx$$

Or, dans le terme de droite, on reconnait l'intégrale A de la question précédente qui a été calculée par parties. Il s'agit ici d'une **double intégration par parties**.

On a donc :

$$B = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0^2\sin(0) - 2 \times 1$$
$$= \frac{\pi^2}{4} - 2$$

$$C = \int_1^{e^2} \underbrace{1}_{u'} \times \underbrace{\ln(x)}_{v}\, dx$$

On pose : $v(x) = \ln(x) \quad \rightarrow \quad v'(x) = \frac{1}{x}$

$u'(x) = 1 \quad \rightarrow \quad u(x) = x$

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$C = \int_1^{e^2} u'(x)\, v(x) dx = [u(x)v(x)]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} u(x)v'(x)\, dx$$

$$= [x \ln(x)]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x\, \frac{1}{x} dx$$

$$= e^2 \ln(e^2) - 1 \ln(1) - \int_1^{e^2} 1\, dx$$

$$= e^2 \times 2 \ln(e) - [x]_1^{e^2}$$

$$= e^2 \times 2 - e^2 + 1$$

$$= e^2 + 1$$

Partie 2 : Applications du calcul intégral

1) Aire délimitée par deux courbes

Méthode : Calculer l'aire délimitée par les courbes de deux fonctions continues et positives

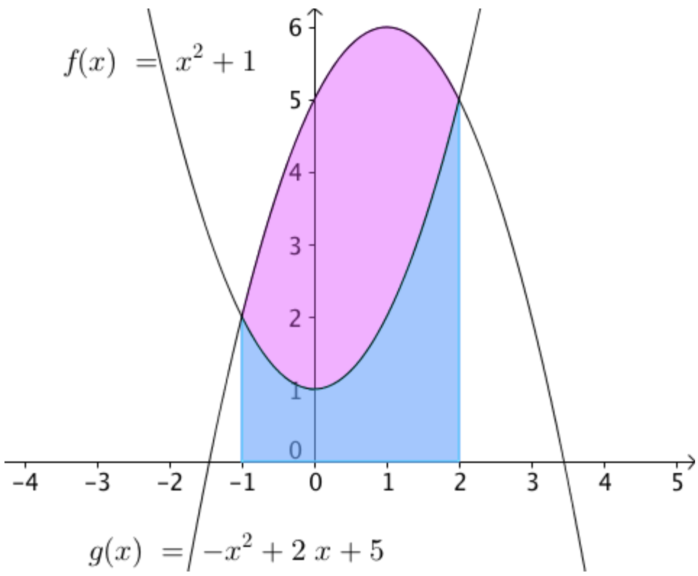
Vidéo https://youtu.be/oRSAYNwUiHQ

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 5$.
On admet que pour tout x de $[-1\,;2]$, on a $f(x) \leq g(x)$.
Déterminer l'aire délimitée par les courbes représentatives de f et de g sur l'intervalle $[-1\,;2]$.

Correction

On calcule la différence de l'aire sous la courbe représentative de g et de l'aire sous la courbe représentative de f.
Cela revient à calculer la différence des intégrales :

$$A = \int_{-1}^{2} g(x)\, dx - \int_{-1}^{2} f(x)\, dx$$



$$I_g = \int_{-1}^{2} g(x)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} -x^2 + 2x + 5\, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 5x\right]_{-1}^{2}$$
$$= -\frac{1}{3} \times 2^3 + 2^2 + 5 \times 2 - \left(-\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 + 5 \times (-1)\right)$$
$$= 15$$

$$I_f = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx$$
$$= \int_{-1}^{2} x^2 + 1 \ dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{2}$$
$$= \frac{1}{3} \times 2^3 + 2 - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)\right)$$
$$= 6$$

Donc : $A = I_g - I_f = 15 - 6 = 9\,u.a.$

Remarque : Une autre méthode, un peu plus rapide, consisterait à utiliser la linéarité de l'intégrale.

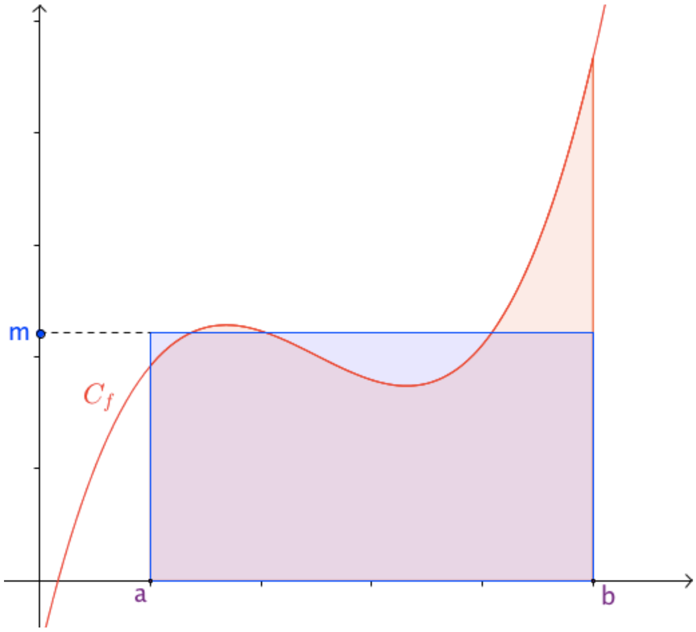
$$A = \int_{-1}^{2} g(x)\,dx - \int_{-1}^{2} f(x)\,dx$$
$$= \int_{-1}^{2} -x^2 + 2x + 5\,dx - \int_{-1}^{2} x^2 + 1 \ dx$$
$$= \int_{-1}^{2} -x^2 + 2x + 5 - x^2 - 1\,dx$$
$$= \int_{-1}^{2} -2x^2 + 2x + 4 \ dx = \cdots = 9$$

2) Valeur moyenne d'une fonction

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ avec $a \neq b$.
On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a\,;b]$ le nombre réel :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Interprétation géométrique :
L'aire sous la courbe représentative de f (en rouge ci-dessous) est égale à l'aire sous la droite d'équation $y = m$ (en bleu), entre a et b.



Exemple :
Calculons la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ sur l'intervalle [1 ; 10].

$$m = \frac{1}{10-1}\int_1^{10} 3x^2 - 4x + 5\,dx$$
$$= \frac{1}{9}[x^3 - 2x^2 + 5x]_1^{10}$$
$$= \frac{1}{9}\big((10^3 - 2\times 10^2 + 5\times 10) - (1^3 - 2\times 1^2 + 5\times 1)\big) = \frac{1}{9}(850 - 4) = \frac{846}{9} = 94$$

Méthode : Calculer la valeur moyenne d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/oVFHojz5y50

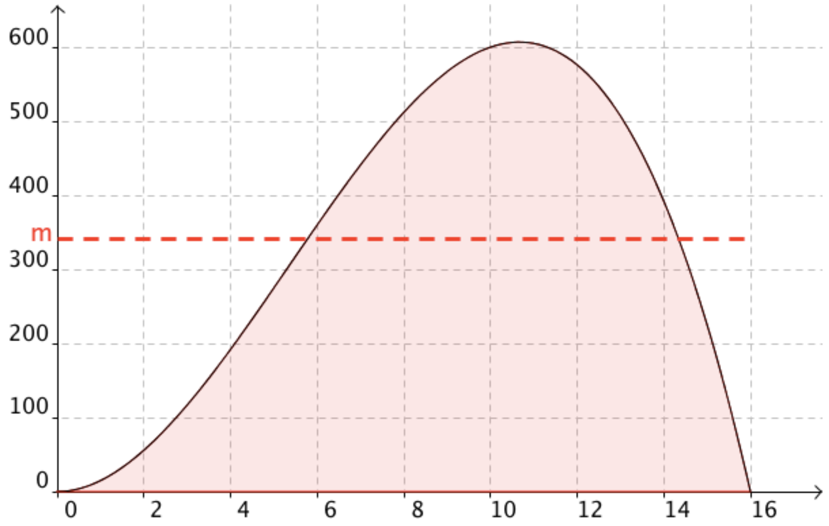
On modélise, à l'aide d'une fonction, le nombre de malades lors d'une épidémie.
Au x-ième jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à $f(x) = 16x^2 - x^3$.
Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.

Correction

$$m = \frac{1}{16-0}\int_0^{16} f(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{16}\int_0^{16} 16x^2 - x^3\,dx$$
$$= \frac{1}{16}\left[\frac{16}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^{16}$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{16}{3} \times 16^3 - \frac{1}{4} \times 16^4\right)$$
$$= \frac{1024}{3} \approx 341$$

Le nombre moyen de malades chaque jour est environ égal à 341.



3) Intégrales et suites

Méthode : Étudier une suite d'intégrales

Vidéo https://youtu.be/8I0jA4lClKM

On considère la suite d'intégrales (I_n) définie pour tout entier n, par :

$$I_n = \int_1^e x\,(\ln(x))^n\,dx$$

a) Calculer I_0.

b) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$

c) A l'aide d'un programme écrit en Python, conjecturer la limite de la suite (I_n).

Correction

a) Pour $n = 0$, on a :

$$I_0 = \int_1^e x\ dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}1^2 = \frac{e^2 - 1}{2}$$

b) L'objectif est d'exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.

$$I_{n+1} = \int_1^e \underbrace{x}_{u'}\ \underbrace{(\ln(x))^{n+1}}_{v}\,dx$$

On pose : $v(x) = (\ln(x))^{n+1} \rightarrow v'(x) = (n+1) \times \frac{1}{x} \times (\ln(x))^n$

$u'(x) = x \rightarrow u(x) = \frac{1}{2}x^2$

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$I_{n+1} = \int_1^e u'(x)\, v(x) dx = [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u(x)v'(x)\, dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2(\ln(x))^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2(n+1) \times \frac{1}{x} \times (\ln(x))^n\, dx$$
$$= \frac{1}{2}e^2(\ln(e))^{n+1} - \frac{1}{2} \times 1^2(\ln(1))^{n+1} - \frac{n+1}{2}\int_1^e x(\ln(x))^n\, dx$$
$$= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2}I_n$$

Donc :

$$I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2}I_n$$

c)
```
from math import*

def integ(n):
    I=(e**2-1)/2
    for k in range(1,n+1):
        I=e**2/2-k*I/2
    return I
```

```
>>> integ(5)
0.951367987633668
>>> integ(10)
0.5748317309902866
>>> integ(30)
39275840.04973485
>>> integ(100)
1.170494462774085e+112
```

On conjecture que : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = +\infty$

Remarque : En fait cette conjecture n'est pas exacte !
Pour en savoir plus, regarder ceci : https://youtu.be/8I0jA4lClKM?t=831
Cela devrait démarrer à **13:56**.