# CALCUL INTÉGRAL (Partie 2)

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/pFKzXZrMVxs

## I. Inégalités

Propriétés : Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle I ; $a$ et $b$ deux réels de I avec $a \leq b$.
a) Si, pour tout $x$ de $[a\,;b]$, $f(x) \geq 0$ , alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
b) Si, pour tout $x$ de $[a\,;b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

Démonstration :
a) Par définition, lorsque $f$ est positive, l'intégrale de $f$ est une aire donc est positive.
b) Si $f(x) \geq g(x)$ alors $f(x) - g(x) \geq 0$.
Donc en appliquant a), on a : $\int_a^b f(x) - g(x)\,dx \geq 0$.
Par linéarité, on a $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geq 0$ et donc $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

Méthode : Encadrer une intégrale

**Vidéo** https://youtu.be/VK0PvzWBIso

a) Démontrer que pour tout $x$ de [0 ; 1], on a : $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.
b) En déduire que : $0 \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq e - 1$.

a) Sur [0 ; 1], $x^2 \leq x$.
Comme la fonction exponentielle est croissante et positive sur $\mathbb{R}$, on a : $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b) On déduit de la question précédente que :
$$\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq \int_0^1 e^x\,dx$$
$$\int_0^1 0\,dx = 0 \text{ et } \int_0^1 e^x\,dx = [e^x]_0^1 = e - 1$$
D'où : $0 \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq e - 1$.

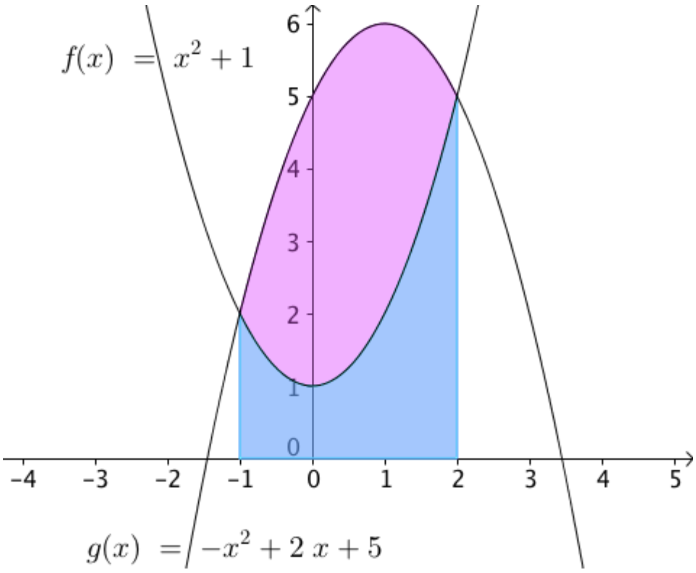
## II. Aire délimitée par deux courbes

Méthode : Calculer l'aire délimitée par les courbes de deux fonctions continues et positives

**Vidéo** https://youtu.be/oRSAYNwUiHQ

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 5$.

On admet que pour tout $x$ de $[-1\,;2]$, on a $f(x) \leq g(x)$.
Déterminer l'aire délimitée par les courbes représentatives de $f$ et de $g$ sur l'intervalle $[-1\,;2]$.




On calcule la différence de l'aire sous la courbe représentative de $g$ et de l'aire sous la courbe représentative de $f$.
Cela revient à calculer la différence des intégrales :

$$A = \int_{-1}^{2} g(x)\,dx - \int_{-1}^{2} f(x)\,dx$$

$$\begin{aligned} I_g &= \int_{-1}^{2} g(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{2} -x^2 + 2x + 5\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 5x\right]_{-1}^{2} \\ &= -\frac{1}{3} \times 2^3 + 2^2 + 5 \times 2 - \left(-\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 + 5 \times (-1)\right) \\ &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_f &= \int_{-1}^{2} f(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{2} x^2 + 1\ \,dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{2} \\ &= \frac{1}{3} \times 2^3 + 2 - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)\right) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Donc : $A = I_g - I_f = 15 - 6 = 9\,u.a.$

<u>Remarque :</u> Une autre méthode, un peu plus rapide, consisterait à utiliser la linéarité de l'intégrale.

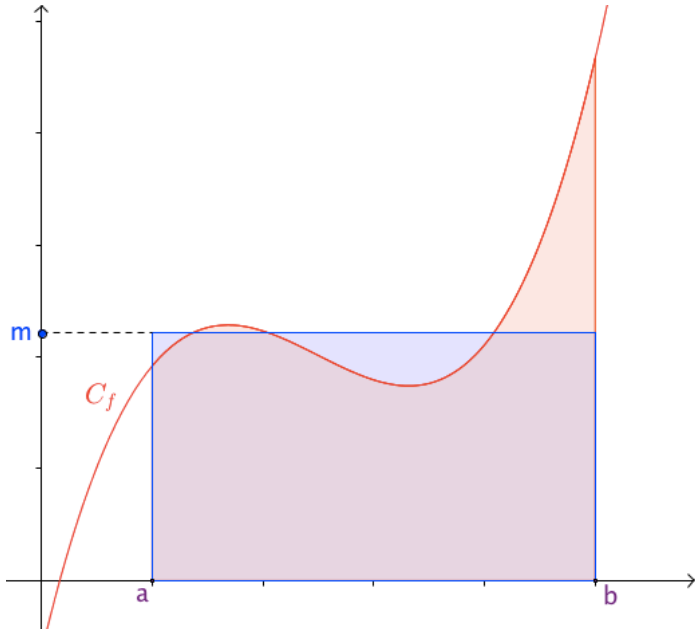
$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} g(x)\,dx - \int_{-1}^{2} f(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{2} -x^2 + 2x + 5\,dx - \int_{-1}^{2} x^2 + 1\ \,dx \\ &= \int_{-1}^{2} -x^2 + 2x + 5 - x^2 - 1\,dx \\ &= \int_{-1}^{2} -2x^2 + 2x + 4\ \,dx = \cdots = 9 \end{aligned}$$

## III. Valeur moyenne d'une fonction

Définition : Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ avec $a \neq b$.
On appelle **valeur moyenne** de $f$ sur $[a\,;b]$ le nombre réel :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Interprétation géométrique :
L'aire sous la courbe représentative de $f$ (en rouge ci-dessous) est égale à l'aire sous la droite d'équation $y = m$ (en bleu).




Exemple :
Calculons la valeur moyenne de la fonction $f$ définie par $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ sur l'intervalle [1 ; 10].

$$m = \frac{1}{10-1}\int_1^{10} 3x^2 - 4x + 5\,dx$$
$$= \frac{1}{9}[x^3 - 2x^2 + 5x]_1^{10}$$
$$= \frac{1}{9}(10^3 - 2 \times 10^2 + 5 \times 10 - 1^3 + 2 \times 1^2 - 5 \times 1) = \frac{846}{9} = 94$$

Méthode : Calculer une valeur moyenne d'une fonction

**Vidéo** https://youtu.be/oVFHojz5y50

On modélise à l'aide d'une fonction le nombre de malades lors d'une épidémie.
Au $x$-ième jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à $f(x) = 16x^2 - x^3$.
Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.

$$m = \frac{1}{16-0}\int_0^{16} f(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{16}\int_0^{16} 16x^2 - x^3\,dx$$
$$= \frac{1}{16}\left[\frac{16}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^{16}$$
$$= \frac{1}{16}\left(\frac{16}{3}\times 16^3 - \frac{1}{4}\times 16^4\right)$$
$$= \frac{1024}{3} \approx 341$$

Le nombre moyen de malades chaque jour est environ égal à 341.