

INTÉGRATION – Chapitre 2/2

▶ Tout le cours en vidéo : <https://youtu.be/pFKzXZrMVxs>

Partie 1 : Aire délimitée par deux courbes

Méthode : Calculer l'aire délimitée par les courbes de deux fonctions continues et positives

▶ Vidéo <https://youtu.be/oRSAYNwUiHQ>

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 5$.

On admet que pour tout x de $[-1 ; 2]$, on a $f(x) \leq g(x)$.

Déterminer l'aire délimitée par les courbes représentatives de f et de g sur l'intervalle $[-1 ; 2]$.

Correction

On calcule la différence de l'aire sous la courbe représentative de g et de l'aire sous la courbe représentative de f .

Cela revient à calculer la différence des intégrales :

$$A = \int_{-1}^2 g(x) dx - \int_{-1}^2 f(x) dx$$

$$I_g = \int_{-1}^2 g(x) dx$$

$$= \int_{-1}^2 -x^2 + 2x + 5 dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 5x \right]_{-1}^2$$

$$= -\frac{1}{3} \times 2^3 + 2^2 + 5 \times 2 - \left(-\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 + 5 \times (-1) \right)$$

$$= 15$$

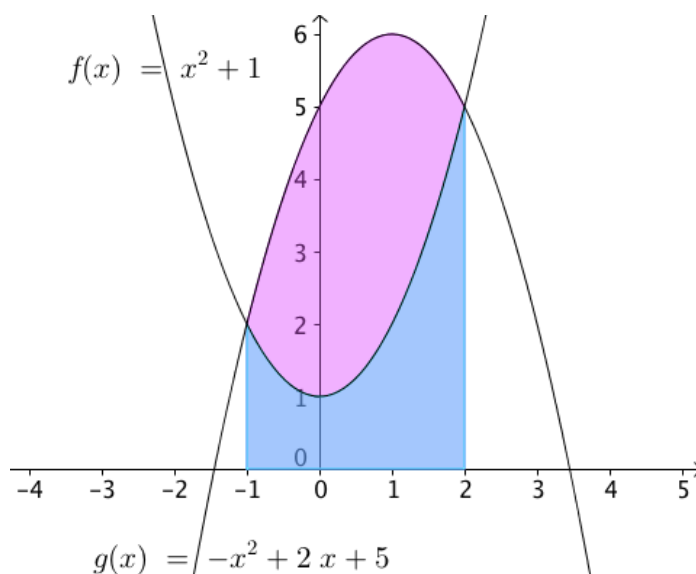
$$I_f = \int_{-1}^2 f(x) dx$$

$$= \int_{-1}^2 x^2 + 1 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_{-1}^2$$

$$= \frac{1}{3} \times 2^3 + 2 - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1) \right)$$

$$= 6$$



Donc : $A = I_g - I_f = 15 - 6 = 9 \text{ u. a.}$

Remarque : Une autre méthode, un peu plus rapide, consisterait à utiliser la linéarité de l'intégrale.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^2 g(x) dx - \int_{-1}^2 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^2 -x^2 + 2x + 5 dx - \int_{-1}^2 x^2 + 1 dx \\ &= \int_{-1}^2 -x^2 + 2x + 5 - x^2 - 1 dx \\ &= \int_{-1}^2 -2x^2 + 2x + 4 dx = \dots = 9 \end{aligned}$$

Partie 2 : Valeur moyenne d'une fonction

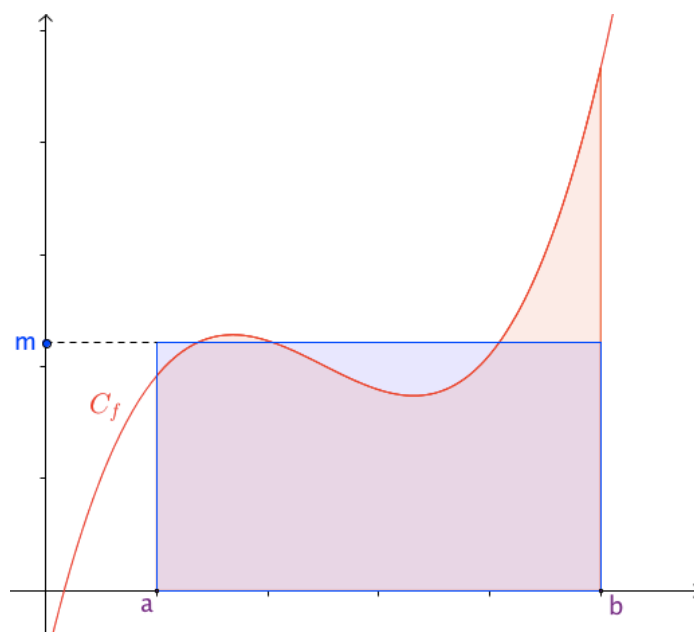
Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a \neq b$.

On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a ; b]$ le nombre réel :

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Interprétation géométrique :

L'aire sous la courbe représentative de f (en rouge ci-dessous) est égale à l'aire sous la droite d'équation $y = m$ (en bleu), entre a et b .



Exemple :

Calculons la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ sur l'intervalle $[1 ; 10]$.

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{1}{10-1} \int_1^{10} 3x^2 - 4x + 5 \, dx \\
 &= \frac{1}{9} [x^3 - 2x^2 + 5x]_1^{10} \\
 &= \frac{1}{9} ((10^3 - 2 \times 10^2 + 5 \times 10) - (1^3 - 2 \times 1^2 + 5 \times 1)) = \frac{1}{9} (850 - 4) = \frac{846}{9} = 94
 \end{aligned}$$

Méthode : Calculer une valeur moyenne d'une fonction

Vidéo <https://youtu.be/oVFHojz5y50>

On modélise, à l'aide d'une fonction, le nombre de malades lors d'une épidémie.

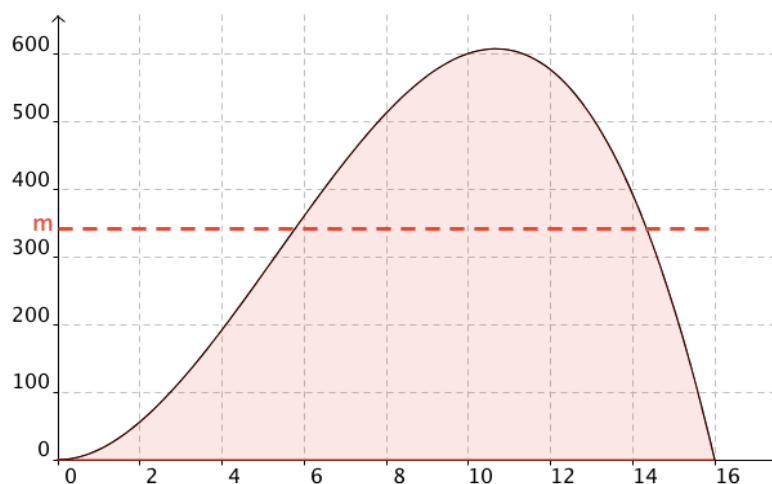
Au x -ième jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à $f(x) = 16x^2 - x^3$.

Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.

Correction

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{1}{16-0} \int_0^{16} f(x) \, dx \\
 &= \frac{1}{16} \int_0^{16} 16x^2 - x^3 \, dx \\
 &= \frac{1}{16} \left[\frac{16}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^{16} \\
 &= \frac{1}{16} \left(\frac{16}{3} \times 16^3 - \frac{1}{4} \times 16^4 \right) \\
 &= \frac{1024}{3} \approx 341
 \end{aligned}$$

Le nombre moyen de malades chaque jour est environ égal à 341.



© Copyright

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales

Yvan Monka – Académie de Strasbourg – www.maths-et-tiques.fr