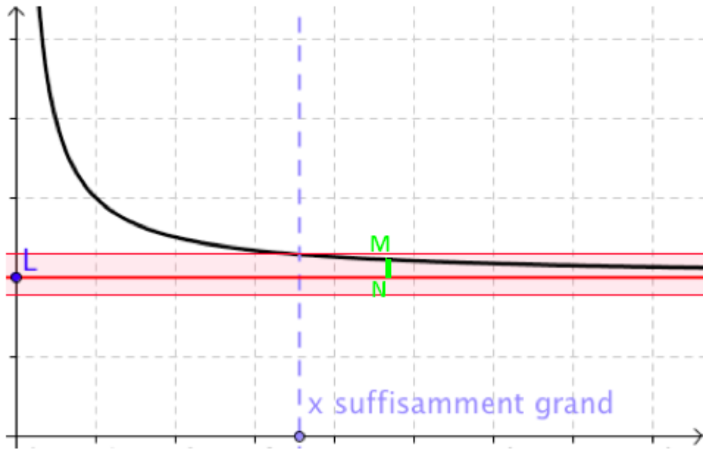
LIMITES DES FONCTIONS

I. Limite d'une fonction à l'infini

1) Limite finie à l'infini

Intuitivement :
On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi proche de L que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

Exemple :
La fonction définie par $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ a pour limite 2 lorsque x tend vers $+\infty$.
En effet, les valeurs de la fonction se resserrent autour de 2 dès que x est suffisamment grand. La distance MN tend vers 0.



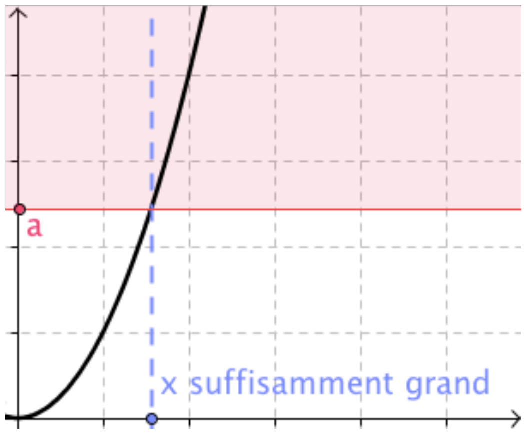
Définitions : - La droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.
- La droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$ si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$.

Remarque :
Lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe de la fonction "se rapproche" de son asymptote.

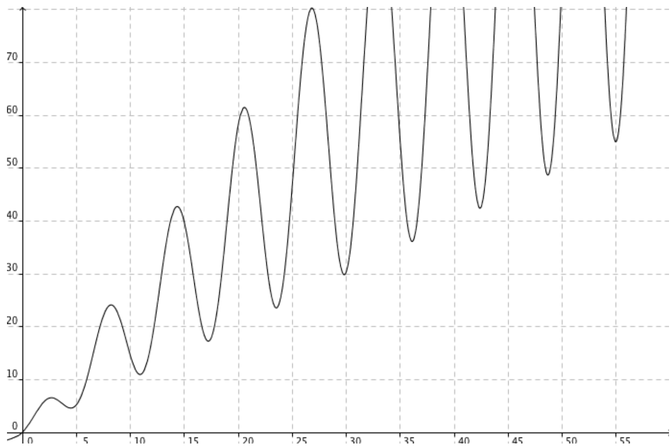
2) Limite infinie à l'infini

Intuitivement :
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

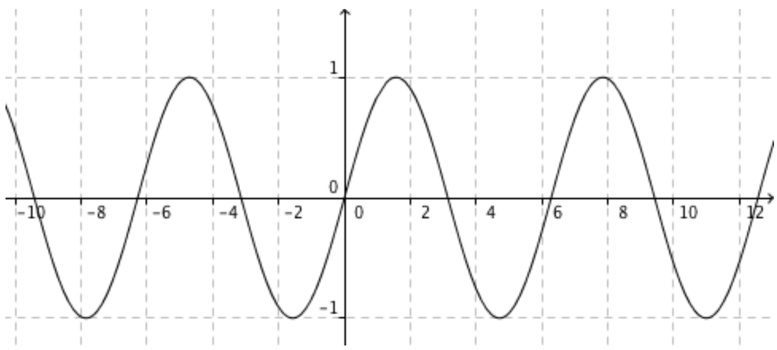
Exemple :
La fonction définie par $f(x) = x^2$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment grand.



Remarques :
- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.



- Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite infinie. C'est le cas des fonctions sinusoïdales.



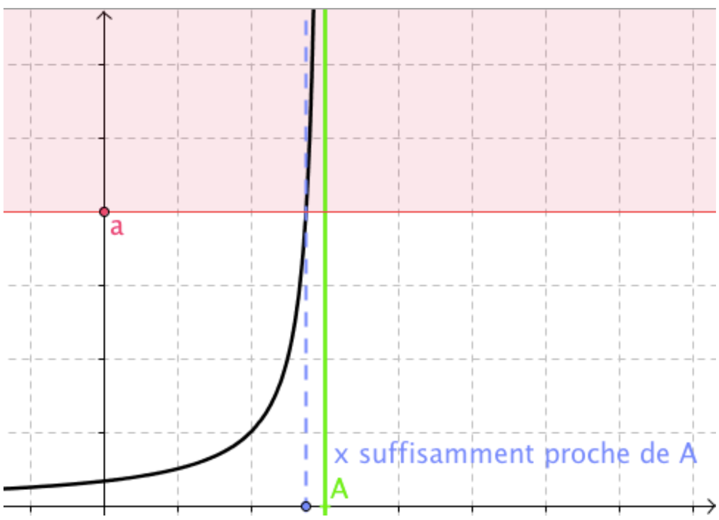
3) Limites des fonctions usuelles

Propriétés :
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

II. Limite d'une fonction en un réel A

Intuitivement :
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en *A* si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de *A*.

Exemple :
La fonction représentée ci-dessous a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers *A*.
En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment proche de *A*.



Définition : La droite d'équation $x = A$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f si : $\lim\limits_{x \to A} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to A} f(x) = -\infty$.

Remarque :
Certaines fonctions admettent des limites différentes en un réel *A* selon $x > A$ ou $x < A$.

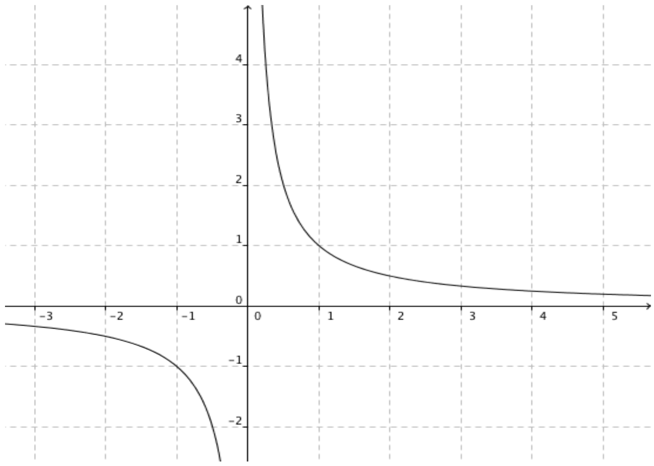
Considérons la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

- Si x < 0 : Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers $-\infty$ et on note :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty.$$

- Si x > 0 : Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers $+\infty$ et on note :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty.$$



On parle de **limite à gauche** de 0 et de **limite à droite** de 0.

Déterminer graphiquement des limites d'une fonction :
Vidéo https://youtu.be/9nEJCL3s2eU

III. Opérations sur les limites

Vidéo https://youtu.be/at6pFx-Umfs

α peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

1) Limite d'une somme

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) + g(x) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

2) Limite d'un produit

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	L	L	∞	0
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)g(x) =$	$L\,L'$	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

<u>Exemple :</u> $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-5)(3+x^2)$?

$\lim_{x \to -\infty} (x-5) = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} (3+x^2) = +\infty$
D'après la règle sur la limite d'un produit : $\lim_{x \to -\infty} (x-5)(3+x^2) = -\infty$

3) Limite d'un quotient

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim_{x \to \alpha} f(x) =$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim_{x \to \alpha} g(x) =$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$\frac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : $\lim_{x \to 3} \frac{1-2x}{x-1}$?
$\lim_{x \to 3} 1-2x = -5$
$\lim_{x \to 3} x-1 = 2$
D'après la règle sur la limite d'un quotient : $\lim_{x \to 3} \frac{1-2x}{x-1} = -\frac{5}{2}$

Remarque :
Comme pour les suites, on rappelle que les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

$$"\infty - \infty", "0 \times \infty", "\frac{\infty}{\infty}" \text{ et } "\frac{0}{0}".$$

Méthode : Lever une forme indéterminée sur les fonctions polynômes et rationnelles
- NON EXIGIBLE -

Vidéo https://youtu.be/4NQbGdXThrk
Vidéo https://youtu.be/8tAVa4itblc

Calculer : 1) $\lim_{x \to +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1$ 2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}$

1) • $\lim_{x \to +\infty} -3x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty$

On reconnait une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$".

• Levons l'indétermination :

$$-3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = x^3\left(-3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$$

• Or : $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0.$
Donc, par limite d'une somme :

$$\lim_{x\to+\infty} -3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}=-3$$

De plus, $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, donc, par limite d'un produit :

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(-3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=-\infty$$

Soit : $\lim_{x\to+\infty} -3x^3+2x^2-6x+1=-\infty$.

2) • En appliquant la méthode de la question 1) pour le numérateur et le dénominateur de la fonction rationnelle, cela nous conduit à une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".

• Levons l'indétermination :

$$\frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}=\frac{x^2}{x^2}\times\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}}=\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}}$$

• Or : $\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x^2}=0$.

Donc, par limite d'une somme :

$$\lim_{x\to+\infty} 2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=2 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} 6-\frac{5}{x^2}=6$$

Donc, par limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Soit : $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}=\frac{1}{3}$.

Méthode : Déterminer une asymptote

Vidéo https://youtu.be/0LDGK-QkL80

Vidéo https://youtu.be/pXDhrx-nMto

Soit f la fonction définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\frac{-2}{1-x}$.

Démontrer que la courbe représentative de la fonction f admet des asymptotes dont on précisera les équations.

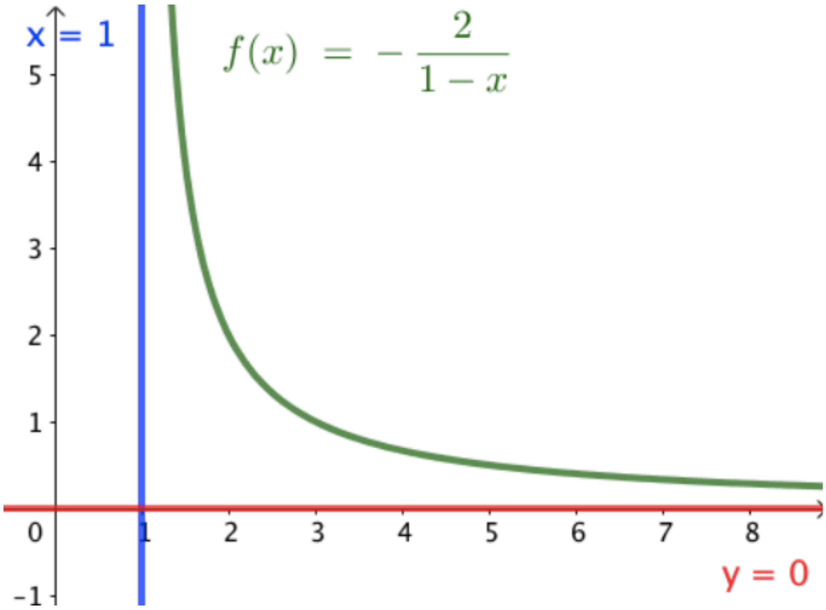
- $\lim_{x\to+\infty} 1-x=-\infty$ donc par limite d'un quotient, on a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{1-x}=0$.

On en déduit que la droite d'équation $y=0$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.

- $\lim_{x\to1} 1-x=0$ donc par limite d'un quotient : $\lim_{x\to1}\frac{-2}{1-x}=+\infty$ car $1-x<0$ pour $x>1$.

On en déduit que la droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f en 1.

En traçant la fonction f à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, il est possible de vérifier.



IV. Calculs de limites par composition et comparaison

1) Composition de limites

Méthode : Déterminer la limite d'une fonction composée

Vidéo https://youtu.be/DNU1M3li76k
Vidéo https://youtu.be/f5i_u8XVMfc

Soit la fonction f définie sur $\left]\frac{1}{2} \,;\, +\infty\right[$ par : $f(x) = \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$
Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2$

Donc, comme limite d'une fonction composée : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2 - \frac{1}{x}} = \sqrt{2}$

2) Comparaison

Méthode : Calculer une limite par comparaison

Vidéo https://youtu.be/OAtkpYMdu7Y

Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \sin x$

• $\lim_{x \to +\infty} \sin x$ n'existe pas.
Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :
• Pour tout x, $-1 \leq \sin x$, donc : $x - 1 \leq x + \sin x$.

• Or $\lim_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$, donc par comparaison :

$$\lim_{x \to +\infty} x + \sin x = +\infty$$

Par abus de langage, on pourrait dire que la fonction $x \longmapsto x - 1$ pousse la fonction $x \longmapsto x + \sin x$ vers $+\infty$ pour des valeurs de x suffisamment grandes.