LIMITES DES FONCTIONS – Chapitre 1/2

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/YPwJyYDsmxM

Partie 1 : Limite d'une fonction à l'infini

1) Limite infinie en ∞

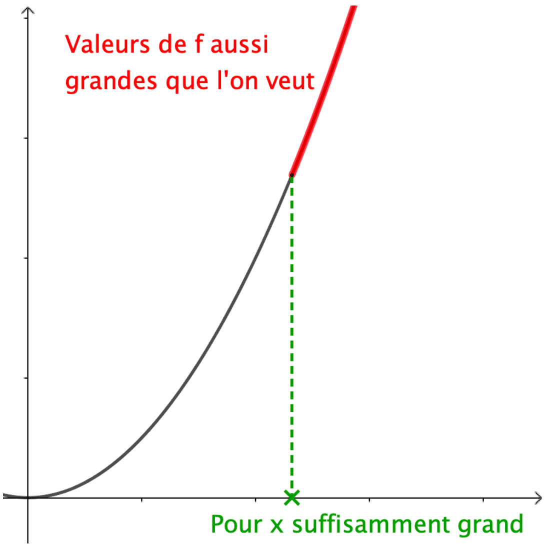
Définition :
On dit que la fonction f admet pour **limite** $+\infty$ **en** $+\infty$,
si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

Remarque : On a une définition analogue en $-\infty$.

Exemple :
La fonction définie par $f(x)=x^2$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
On a par exemple : $f(100)=100^2=10000$
$f(1000)=1000^2=1\,000\,000$

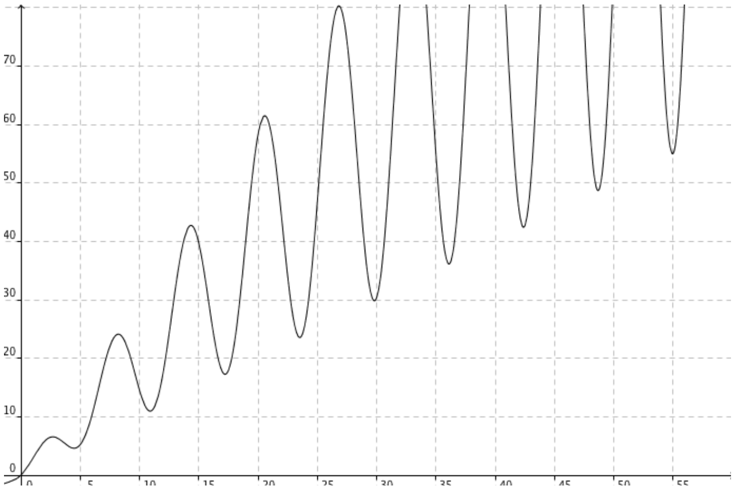
Les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on veut dès que x est suffisamment grand.

Si on prend un intervalle $]a\,;\,+\infty[$ quelconque, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que x est suffisamment grand.

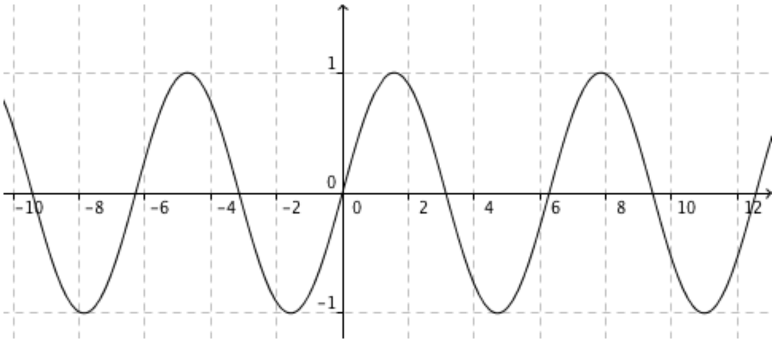


Définitions : - On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]a\,;\,+\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]-\infty\,;\,b[$, b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Remarques :
- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante. Par exemple :



- Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite infinie. C'est le cas des fonctions sinusoïdales.

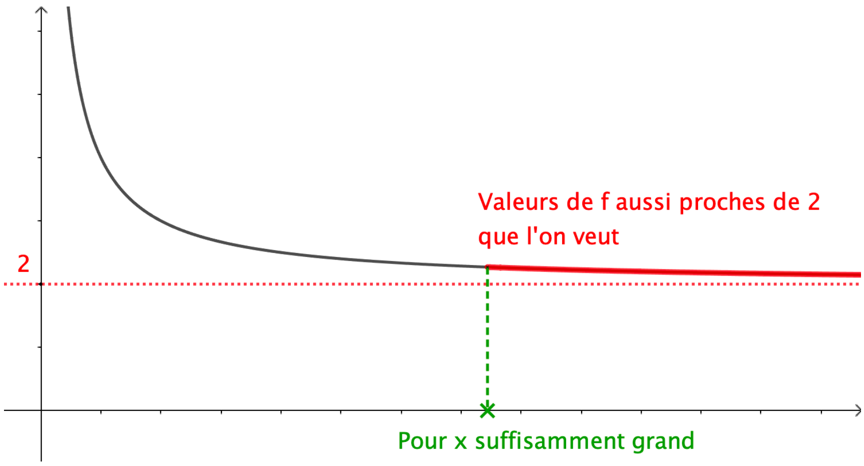


2) Limite finie en ∞

Définition :
On dit que la fonction f admet pour **limite L en** $+\infty$,
si $f(x)$ est aussi proche de L que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Remarque : On a une définition analogue en $-\infty$.

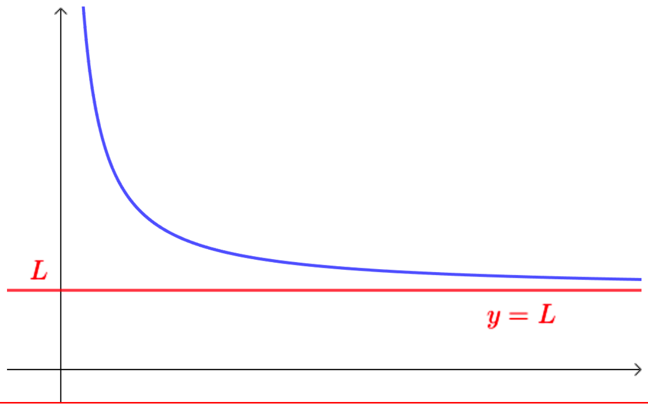
Exemple :
La fonction définie par
$f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ a pour limite 2
lorsque x tend vers $+\infty$.
On a par exemple :
$f(100) = 2 + \frac{1}{100} = 2{,}01$
$f(10000) = 2 + \frac{1}{10000}$
$= 2{,}0001$



Les valeurs de la fonction se resserrent autour de 2 dès que x est suffisamment grand.
La courbe de la fonction "se rapproche" de la droite d'équation $y = 2$ sans jamais la toucher.

Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 2, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que x est suffisamment grand.

Définition : Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, la droite d'équation $y = L$ est appelée **asymptote horizontale** à la courbe de la fonction f en $+\infty$.



Définition :
On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note :
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Remarque : On a des définitions analogues en $-\infty$.

3) Limites des fonctions de référence

Propriétés :
- $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ (pour n pair)
- $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ (pour n impair)
- $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Partie 2 : Limite d'une fonction en un réel A

1) Définition

Définition :
On dit que la fonction f admet pour **limite** $+\infty$ **en** A,
si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de A.

Exemple :

La fonction définie par $f(x) = \frac{1}{3-x} + 1$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers 3.

On a par exemple :

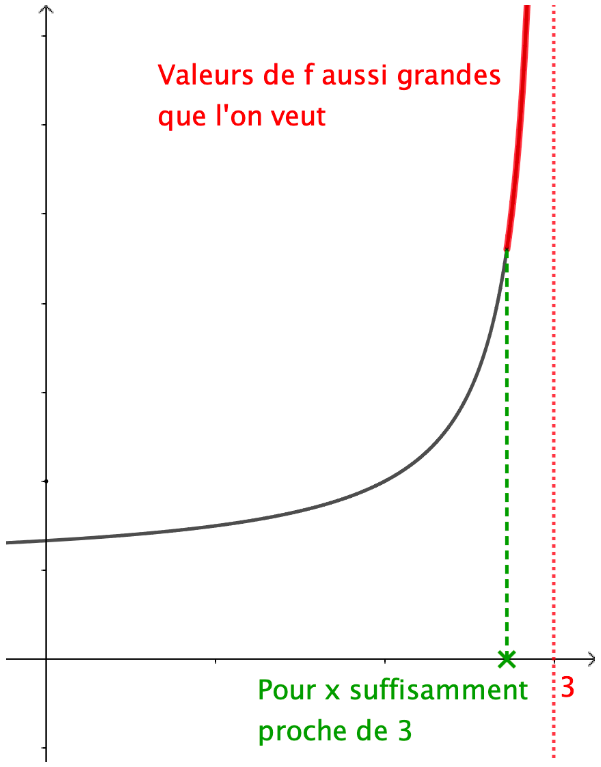
$$f(2{,}99) = \frac{1}{3 - 2{,}99} + 1 = 101$$

$$f(2{,}9999) = \frac{1}{3 - 2{,}9999} + 1 = 10\,001$$

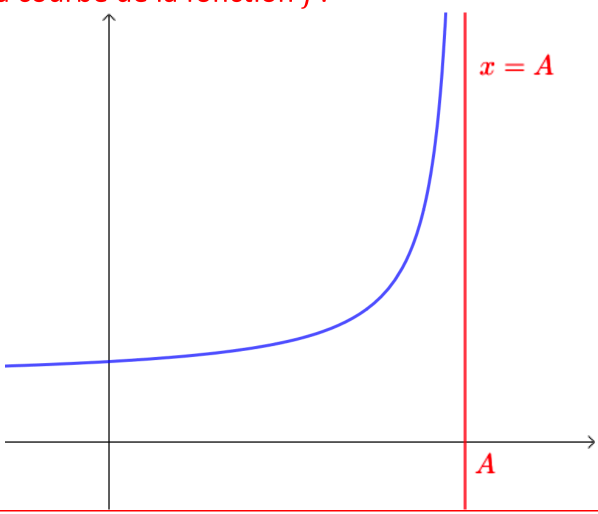
Les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on veut dès que x est suffisamment proche de 3.

La courbe de la fonction "se rapproche" de la droite d'équation $x = 3$ sans jamais la toucher.

Si on prend un intervalle $]a\,;\,+\infty[$ quelconque, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que x est suffisamment proche de 3.



Définition : Si : $\lim\limits_{x \to A} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to A} f(x) = -\infty$, la droite d'équation $x = A$ est appelée **asymptote verticale** à la courbe de la fonction f.

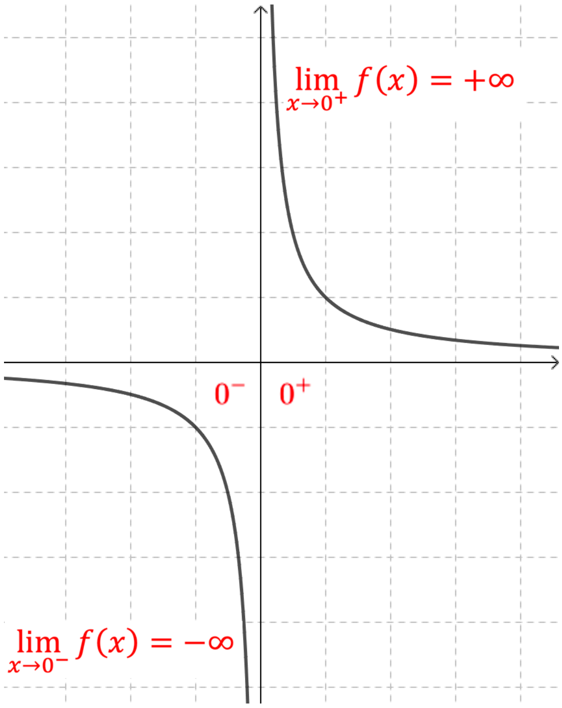


Définitions : - On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en A si tout intervalle $]a\,;\,+\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim\limits_{x \to A} f(x) = +\infty$.

- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en A si tout intervalle $]-\infty\,;\,b[$, b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim\limits_{x \to A} f(x) = -\infty$.

2) Limite à gauche, limite à droite :

Exemple :
Considérons la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
La fonction f admet des limites différentes en 0 selon que :
$x > 0$ ou $x < 0$.



● Si $x > 0$: Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers $+\infty$ et on note :
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.
On parle de **limite à gauche de 0**

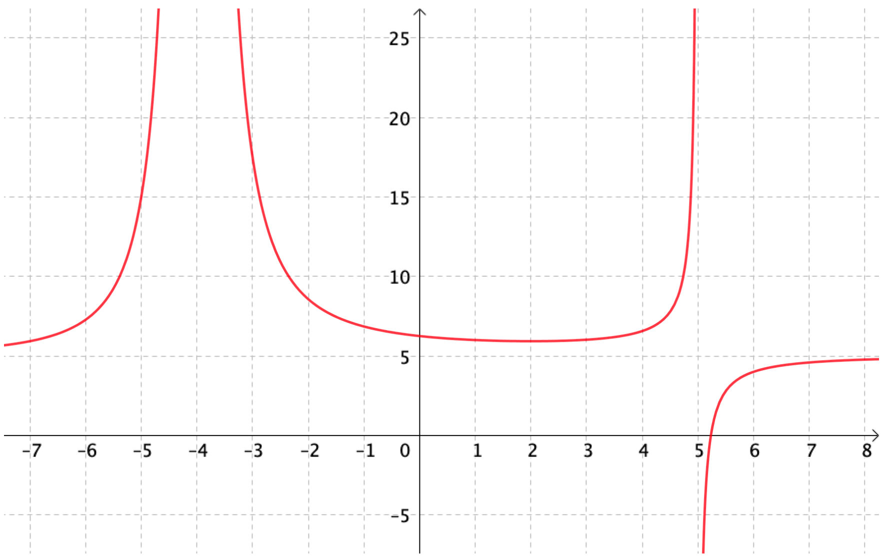
● Si $x < 0$: Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers $-\infty$ et on note :
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$.
On parle de **limite à droite de 0**.

Méthode : Déterminer graphiquement des limites d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/9nEJCL3s2eU

On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f.
a) Lire graphiquement les limites en $-\infty$, en $+\infty$, en -4 et en 5.
b) Compléter alors le tableau de variations de f.

x	$-\infty$	-4	2	5	$+\infty$
$f(x)$					



Correction

a) • $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 5$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$

La courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 5$ en $-\infty$ et $+\infty$.

• $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = +\infty$

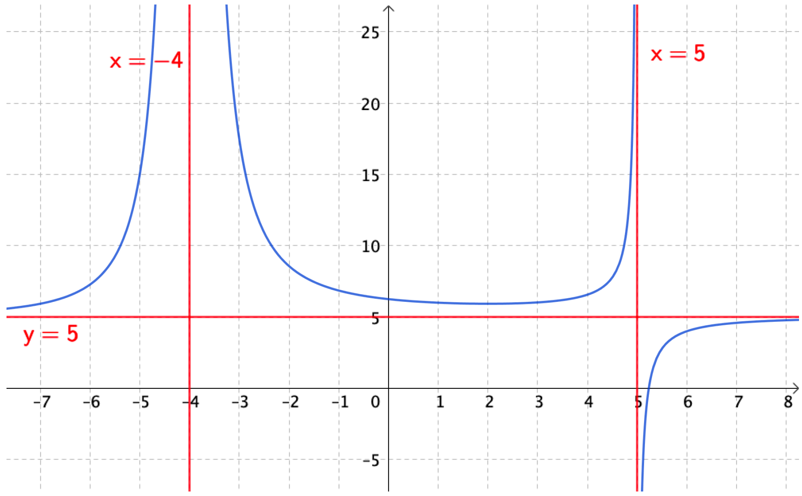
La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = -4$.

• $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = -\infty$

La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 5$.

2)

x	$-\infty$		-4		2		5		$+\infty$
			$+\infty$ ‖ $+\infty$				$+\infty$ ‖		5
$f(x)$		↗	‖	↘		↗	‖	↗	
	5		‖		6		‖ $-\infty$		



Partie 3 : Opérations sur les limites

1) Utiliser les propriétés des opérations sur les limites

α peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

SOMME

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) + g(x) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

PRODUIT ∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	L	L	∞	0
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) \times g(x) =$	$L \times L'$	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

QUOTIENT ∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Méthode : Calculer la limite d'une fonction à l'aide des formules d'opération

Vidéo https://youtu.be/at6pFx-Umfs

Déterminer les limites suivantes : a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-5)(3+x^2)$ b) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1-2x}{x-3}$

Correction

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-5)(3+x^2) = ?$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x-5 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \; donc \; \lim\limits_{x \to -\infty} 3+x^2 = +\infty \end{cases}$$

Comme limite d'un produit : $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-5)(3+x^2) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1-2x}{x-3} = ?$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} 1-2x = 1-2\times 3 = -5 \\ \lim\limits_{x \to 3^-} x-3 = 0^- \end{cases}$$

Une limite de la forme « $\dfrac{5}{0}$ » est égale à « ∞ ».

Donc, d'après la règle des signes, une limite de la forme « $\dfrac{-5}{0^-}$ » est égale à « $+\infty$ ».

D'où, comme limite d'un quotient : $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1-2x}{x-3} = +\infty$.

2) Cas des formes indéterminée

Comme pour les suites, on rappelle que :

Les quatre **formes indéterminées** sont, par abus d'écriture :

$\infty - \infty$ $\qquad 0 \times \infty$ $\qquad \dfrac{\infty}{\infty}$ $\qquad \dfrac{0}{0}$

Méthode : Lever une forme indéterminée à l'aide de factorisations (1)

Vidéo https://youtu.be/4NQbGdXThrk

Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1$

Correction

$\lim\limits_{x \to +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = ?$

• $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} -3x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty. \end{cases}$

On reconnait une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$".

• Levons l'indétermination en factorisant par le monôme de plus haut degré :

$$-3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = x^3\left(-3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0.$

Donc, par limite d'une somme :

$$\lim_{x \to +\infty} -3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3} = -3$$

• $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} -3 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{6}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} = -3 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \end{cases}$

Donc, par limite d'un produit :

$$\lim_{x \to +\infty} x^3\left(-3 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = -\infty$$

Soit : $\lim\limits_{x \to +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = -\infty.$

Méthode : Lever une forme indéterminée à l'aide de factorisations (2)

Vidéo https://youtu.be/8tAVa4itblc

Vidéo https://youtu.be/pmWPfsQaRWI

Calculer : a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2}{4x-1}$

Correction

a) • En appliquant la méthode précédente pour le numérateur et le dénominateur cela conduirait à une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".

• Levons l'indétermination en factorisant les monômes de plus haut degré :

$$\frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5} = \frac{x^2}{x^2} \times \frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}} = \frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}}$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{x^2} = 0.$

Donc, comme limite de sommes :

$$\lim_{x\to+\infty} 2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} 6-\frac{5}{x^2} = 6$$

• Donc, comme limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Soit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5} = \frac{1}{3}$.

b) • Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".

• Levons l'indétermination en factorisant les monômes de plus haut degré :

$$\frac{3x^2+2}{4x-1} = \frac{x^2}{x} \times \frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}} = x \times \frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}$$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x^2} = 0$

Donc, comme limite de sommes :

$$\lim_{x\to-\infty} 3+\frac{2}{x^2} = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} 4-\frac{1}{x} = 4$$

• Donc, comme limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}} = \frac{3}{4}$$

• De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, donc, comme limite d'un produit :

$$\lim_{x\to-\infty} x \times \frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}} = -\infty$$

Soit : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2}{4x-1} = -\infty$.

Méthode : Lever une forme indéterminée à l'aide de l'expression conjuguée

Vidéo https://youtu.be/n3XapvUfXJQ
Vidéo https://youtu.be/y7Sbqkb9RoU

Calculer : a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ b) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

Correction

a) • $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$".

• Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} - \sqrt{x} &= \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}\end{aligned}$$

• Comme limite d'une somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x} = +\infty$.
Et donc, comme limite d'un quotient : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$.
Soit $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 0$.

b) • $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x-1} - 2 = \sqrt{5-1} - 2 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 5} x - 5 = 5 - 5 = 0 \end{cases}$
Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\frac{0}{0}$".

• Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5} &= \frac{\left(\sqrt{x-1} - 2\right)\left(\sqrt{x-1} + 2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1} + 2\right)} \\ &= \frac{x-1-4}{(x-5)\left(\sqrt{x-1} + 2\right)} \\ &= \frac{x-5}{(x-5)\left(\sqrt{x-1} + 2\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x-1} + 2}\end{aligned}$$

• $\lim\limits_{x\to 5} \sqrt{x-1}+2 = \sqrt{5-1}+2 = 4$

Donc, comme limite d'un quotient, on a : $\lim\limits_{x\to 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{4}$.

Soit : $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{1}{4}$.

Méthode : Déterminer une asymptote

Vidéo https://youtu.be/0LDGK-QkL80

Vidéo https://youtu.be/pXDhrx-nMto

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{-2}{1-x}$.

Démontrer que la courbe représentative de la fonction f admet des asymptotes dont on précisera la nature et les équations.

Correction

● $\lim\limits_{x\to +\infty} 1-x = -\infty$ donc comme limite d'un quotient, on a : $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-2}{1-x} = 0$.

On prouve de même que : $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-2}{1-x} = 0$.

On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

● $\lim\limits_{x\to 1^-} 1-x = 0^+$ donc comme limite d'un quotient, on a : $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{-2}{1-x} = -\infty$

Et $\lim\limits_{x\to 1^+} 1-x = 0^-$ donc comme limite d'un quotient, on a : $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{-2}{1-x} = +\infty$

On en déduit que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f.