LIMITES DES FONCTIONS (Partie 2)

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/YPwJyYDsmxM

I. Limite d'une fonction composée

Méthode : Déterminer la limite d'une fonction composée

Vidéo https://youtu.be/DNU1M3li76k

Soit la fonction f définie sur $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par : $f(x)=\sqrt{2-\frac{1}{x}}$

Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}2-\frac{1}{x}=2$

Donc, comme limite de fonction composée : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2-\frac{1}{x}}=\sqrt{2}$

On peut en effet poser $X=2-\frac{1}{x}$ et calculer $\lim\limits_{X\to2}\sqrt{X}=\sqrt{2}$.

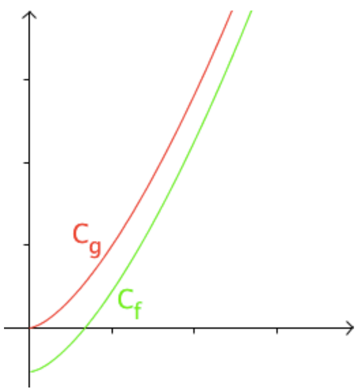
II. Limites et comparaisons

1) Théorèmes de comparaisons

Théorème : Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]a\ ;\ +\infty[$, a réel, telles que pour tout $x>a$, on a $f(x)\leq g(x)$.

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ (figure 1)
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ (figure 2)
- Si $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$ (figure 3)
- Si $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ (figure 4)

Par abus de langage, on pourrait dire que la fonction f pousse la fonction g vers $+\infty$ pour des valeurs de x suffisamment grandes.



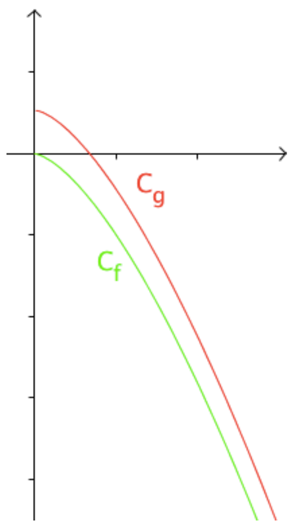
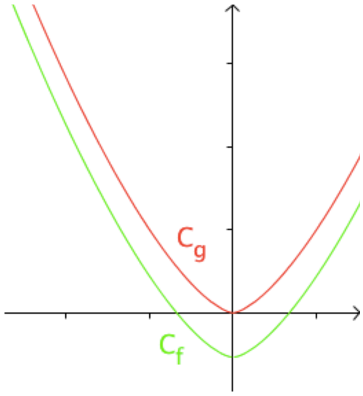


Figure 1　　　　　　*Figure 2*



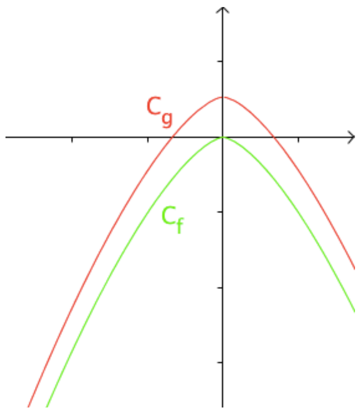


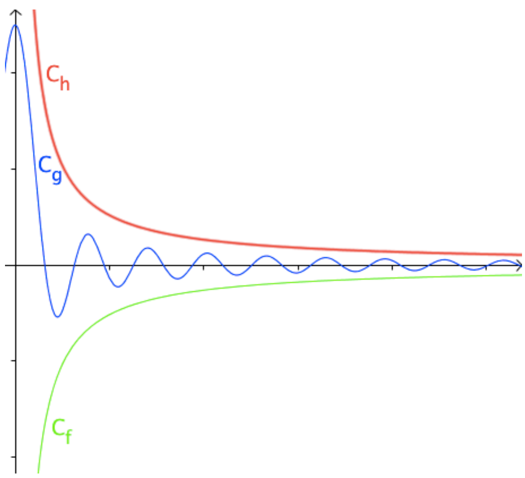
Figure 3　　　　　　*Figure 4*

<u>Démonstration dans le cas de la figure 1 :</u>
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc tout intervalle $]m\,;\,+\infty[$, m réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand, soit : $f(x) > m$.
Or, dès que x est suffisamment grand, on a $f(x) \leq g(x)$.
Donc dès que x est suffisamment grand, on a : $g(x) > m$.
Et donc $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

2) <u>Théorème d'encadrement</u>

<u>Théorème des gendarmes :</u> Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $]a\,;\,+\infty[$, a réel, telles que pour tout $x > a$, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x) = L$ alors $\lim_{x\to+\infty} g(x) = L$.

<u>Remarque :</u> On obtient un théorème analogue en $-\infty$.



Par abus de langage, on pourrait dire que les fonctions f et h (les gendarmes) se resserrent autour de la fonction g pour des valeurs de x suffisamment grandes pour la faire tendre vers la même limite.
Ce théorème est également appelé le théorème du sandwich.

Méthode : Utiliser les théorèmes de comparaison et d'encadrement

Vidéo https://youtu.be/OAtkpYMdu7Y
Vidéo https://youtu.be/Eo1jvPphja0

Calculer : 1) $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \sin x$ 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x \cos x}{x^2+1}$

1) • $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$ n'existe pas.
Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :
• Pour tout x, $-1 \leq \sin x$ donc : $x - 1 \leq x + \sin x$.

• Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{x \to +\infty} x + \sin x = +\infty$$

2) • $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos x$ n'existe pas.
Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :
• Pour tout x, $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc : $-x \leq x \cos x \leq x$, car $x > 0$
Et donc :

$$-\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x \cos x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1}$$
$$-\frac{x}{x^2} \leq -\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x \cos x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2}$$

Soit : $-\frac{1}{x} \leq \frac{x \cos x}{x^2+1} \leq \frac{1}{x}$
• Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
D'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x \cos x}{x^2+1} = 0$.

III. Fonction exponentielle

1) Limites aux bornes

Propriétés :
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Démonstration au programme :
Vidéo https://youtu.be/DDqgEz1Id2s

- La suite (e^n) est une suite géométrique de raison $e > 1$.
Donc, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$.

Si on prend un réel a quelconque (aussi grand que l'on veut), il exsite un rang n_1 à partir duquel tous les termes de la suite dépassent a, soit : $e^{n_1} > a$.
La fonction exponentielle étant strictement croissante, on a également, pour tout $x > n_1$: $e^x > e^{n_1}$.
Donc, pour tout $x > n_1$, on a : $e^x > e^{n_1} > a$.
Ainsi, tout intervalle $]a\,;\,+\infty[$ contient toutes les valeurs de e^x, dès que x est suffisamment grand.
Soit : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{e^X}$, en posant $X = -x$
Or, $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$, donc : $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{e^X} = 0$, comme limite d'un quotient.
Soit : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Méthode : Déterminer la limite d'une fonction contenant des exponentiels

Vidéo https://youtu.be/f5i_u8XVMfc

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x + e^{-3x}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-\frac{1}{x}}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x = -\infty$
- Donc, comme limite de fonction composée : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3x} = 0$
En effet, $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, en posant $X = -3x$
- Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$
D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} x + e^{-3x} = +\infty$ comme limite d'une somme.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$
Donc, comme limite de fonction composée : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-\frac{1}{x}} = e^1 = e$.

2) Croissance comparée des fonctions exponentielles et puissances

Propriétés (croissances comparées) :
a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\,e^x = 0$

Démonstration au programme du a :
Vidéo https://youtu.be/_re6fVWD4b0

- On pose $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.
On a : $f'(x) = e^x - x$
On calcule la dérivée de la dérivée f' :

$(f'(x))' = e^x - 1$.
Et on note $f''(x) = (f'(x))' = e^x - 1$ (Voir chapitre « Convexité »)
Pour tout x strictement positif, $f''(x) = e^x - 1 > 0$.

On dresse alors le tableau de variations :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f''(x)$	+
$f'(x)$	1 ↗
Signe de $f'(x)$	+
$f(x)$	1 ↗

On en déduit que pour tout x strictement positif, $f(x) > 0$ et donc $e^x > \frac{x^2}{2}$.
Soit encore : $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, on en déduit par comparaison de limites que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

- Dans le cas général, on a :

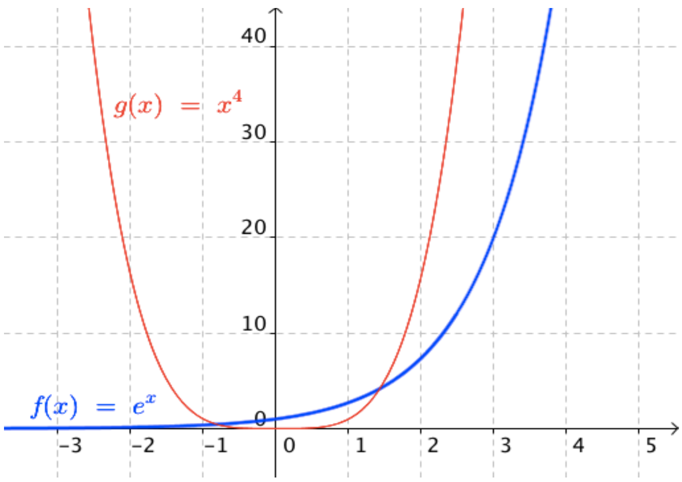
$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$$

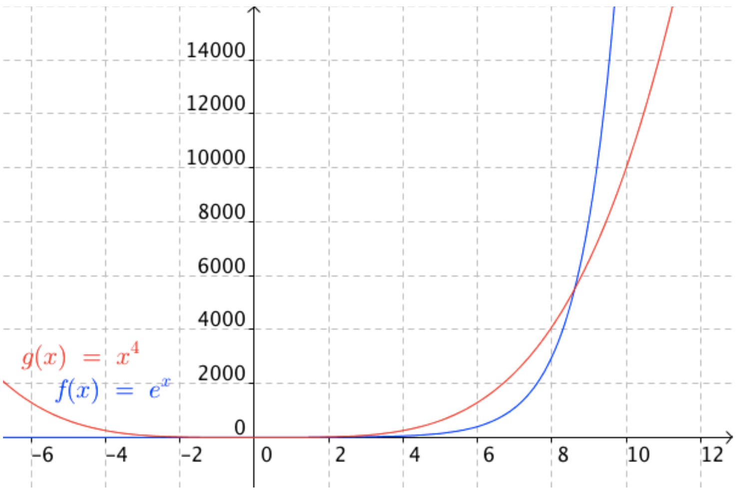
Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$ car on a vu que $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$.
Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$, car n est positif.
Et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n = +\infty$, comme produit de n limites infinies.
Soit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

Remarque : Dans le cas de limites infinies, la fonction exponentielle impose sa limite devant les fonctions puissances. Sa croissance est plus rapide.

Exemple : Comparaison de la fonction exponentielle et de la fonction $x \longmapsto x^4$ dans différentes fenêtres graphiques.

On constate que pour x suffisamment grand, la fonction exponentielle dépasse la fonction $x \longmapsto x^4$ (voir graphique suivant).





Méthode : Calculer une limite par croissance comparée

Vidéo https://youtu.be/GoLYLTZFaz0

Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x+x}{e^x-x^2}$

Le dénominateur, par exemple, comprend une forme indéterminée de type "$\infty - \infty$".
Levons l'indétermination :

$$\frac{e^x+x}{e^x-x^2} = \frac{e^x}{e^x} \times \frac{1+\frac{x}{e^x}}{1-\frac{x^2}{e^x}} = \frac{1+\frac{x}{e^x}}{1-\frac{x^2}{e^x}}$$

Or, par croissance comparée : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$.

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$, comme inverse de limites.

Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{x}{e^x}}{1-\frac{x^2}{e^x}} = \frac{1}{1} = 1$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x+x}{e^x-x^2} = 1$.