LIMITES DES FONCTIONS – Chapitre 2/2

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/YPwJyYDsmxM

Partie 1 : Limite d'une fonction composée

Méthode : Déterminer la limite d'une fonction composée

Vidéo https://youtu.be/DNU1M3li76k

Soit la fonction f définie sur $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ par : $f(x)=\sqrt{2-\frac{1}{x}}$

Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Correction

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\frac{1}{x}=2$

Donc, comme limite d'une fonction composée : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2-\frac{1}{x}}=\sqrt{2}$

En effet, si $x\to+\infty$, on a : $X=2-\frac{1}{x}\to 2$ et donc : $\lim\limits_{X\to 2}\sqrt{X}=\sqrt{2}$.

Partie 2 : Limites et comparaisons

1) Théorèmes de comparaison

Théorèmes : Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $I=]a\,;+\infty[$.

- Si pour tout x de I, on a : $\begin{cases} f(x)\leq g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ (Fig.1)

- Si pour tout x de I, on a $\begin{cases} f(x)\leq g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ (Fig.2)

Remarque : On obtient des théorèmes analogues en $-\infty$.

Figure 1

Par abus de langage, on pourrait dire que la fonction f pousse la fonction g vers $+\infty$ pour des valeurs de x suffisamment grandes.

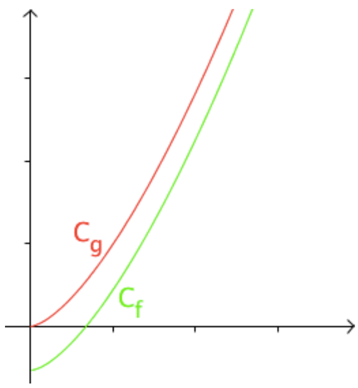
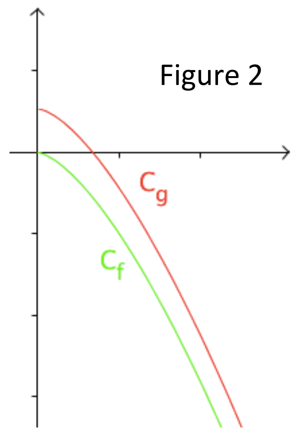


Figure 2

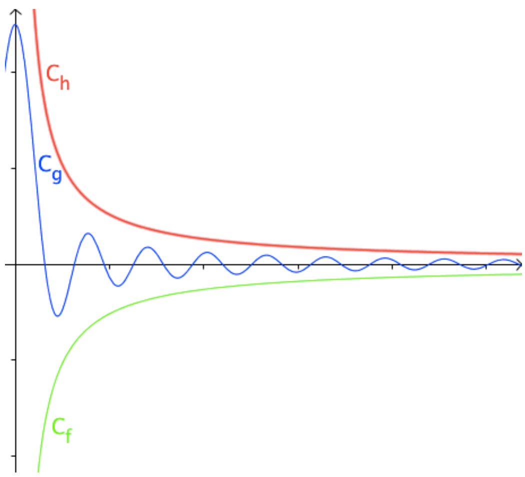


Démonstration dans le cas de la figure 1 :
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc tout intervalle $]m\,;\,+\infty[$, m réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand, soit : $f(x) > m$.
Or, dès que x est suffisamment grand, on a $f(x) \leq g(x)$.
Donc dès que x est suffisamment grand, on a : $g(x) > m$.
Et donc $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

2) Théorème d'encadrement

Théorème des gendarmes :
Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $I =]a\,;\,+\infty[$.
Si pour tout x de I, on a : $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = L \\ \lim_{x \to +\infty} h(x) = L \end{cases}$ alors $\lim_{x \to +\infty} g(x) = L$.

Remarque : On obtient un théorème analogue en $-\infty$.



Par abus de langage, on pourrait dire que les fonctions f et h (les gendarmes) se resserrent autour de la fonction g pour des valeurs de x suffisamment grandes pour la faire tendre vers la même limite.
Ce théorème est également appelé le **théorème du sandwich**.

Méthode : Utiliser les théorèmes de comparaison et d'encadrement

Vidéo https://youtu.be/OAtkpYMdu7Y
Vidéo https://youtu.be/Eo1jvPphja0

Calculer : 1) $\lim_{x \to +\infty} x + \sin x$ 2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x \cos x}{x^2+1}$

Correction

1) • $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$ n'existe pas.
Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.
Levons l'indétermination :
• $-1 \leq \sin x$
Donc : $x - 1 \leq x + \sin x$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{x \to +\infty} x + \sin x = +\infty$$

2) • $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos x$ n'existe pas.
Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :
• $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
Donc : $-x \leq x\cos(x) \leq x$, car $x > 0$
Et donc :

$$-\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x\cos(x)}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1}$$

• $\dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{x}{x\left(x+\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{1}{x+\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Et donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+\frac{1}{x}} = 0$, comme limite d'un quotient.

On a donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$

D'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\cos(x)}{x^2+1} = 0$.

Partie 3 : Cas de la fonction exponentielle

1) Limites aux bornes

Propriétés :
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Démonstration au programme :
Vidéo https://youtu.be/DDqgEz1Id2s

- La suite (e^n) est une suite géométrique de raison $e > 1$.

Donc, on a : $\lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty$.
Si on prend un réel a quelconque (aussi grand que l'on veut), il existe un rang n_1 à partir duquel tous les termes de la suite dépassent a, soit : $e^{n_1} > a$.
La fonction exponentielle étant strictement croissante, on a également, pour tout $x > n_1$: $e^x > e^{n_1}$.
Donc, pour tout $x > n_1$, on a : $e^x > e^{n_1} > a$.
Ainsi, tout intervalle $]a\ ;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs de e^x, dès que x est suffisamment grand.
Soit : $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

- $\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{e^X}$, en posant $X = -x$
Or, $\lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty$, donc : $\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{e^X} = 0$, comme limite d'un quotient.
Soit : $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Méthode : Déterminer la limite d'une fonction contenant des exponentiels

Vidéo https://youtu.be/f5i_u8XVMfc

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to+\infty} x + e^{-3x}$ b) $\lim_{x\to-\infty} e^{1-\frac{1}{x}}$

Correction

a) $\lim_{x\to+\infty} -3x = -\infty$
- Donc, comme limite d'une fonction composée : $\lim_{x\to+\infty} e^{-3x} = 0$

En effet, si $x \to +\infty$, on a : $X = -3x \to -\infty$ et donc : $\lim_{X\to-\infty} e^X = 0$.

- $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

- Comme limite d'une somme : $\lim_{x\to+\infty} x + e^{-3x} = +\infty$.

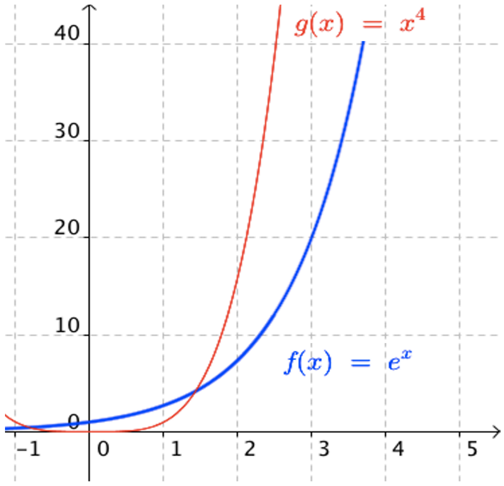
b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc : $\lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$
Donc, comme limite d'une fonction composée : $\lim_{x\to-\infty} e^{1-\frac{1}{x}} = e^1 = e$.

2) Croissance comparée des fonctions exponentielles et puissances

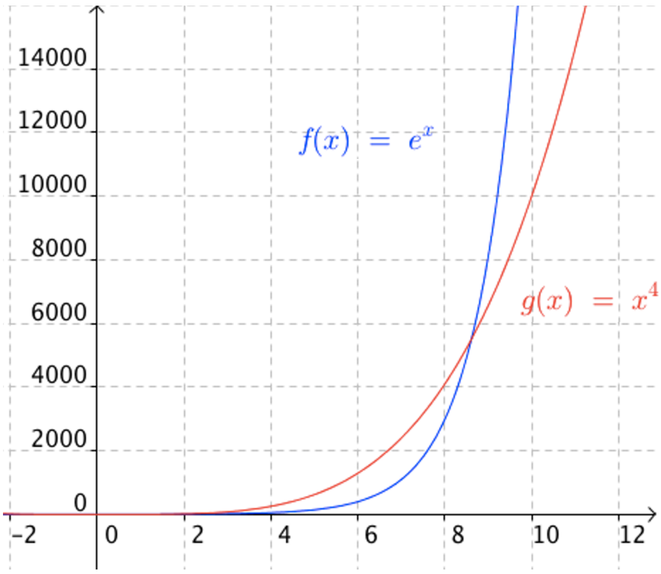
Exemple :

Observons la fonction exponentielle et la fonction puissance $x \longmapsto x^4$ dans différentes fenêtres graphiques.

Dans cette première fenêtre, la fonction puissance semble l'emporter devant la fonction exponentielle.



Mais on constate que pour x suffisamment grand, la fonction exponentielle dépasse la fonction puissance $x \longmapsto x^4$.



<u>Remarque :</u> Dans le cas de limites infinies, la fonction exponentielle impose sa limite devant les fonctions puissances. Sa croissance est plus rapide.

<u>Propriétés (croissances comparées) :</u>

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\,e^x = 0$

<u>Démonstration au programme du a :</u>

Vidéo https://youtu.be/_re6fVWD4b0

- On pose $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

On a : $f'(x) = e^x - x$

On calcule la dérivée de la dérivée f' :
$(f'(x))' = e^x - 1$.
Et on note $f''(x) = (f'(x))' = e^x - 1$
Pour tout x strictement positif, $f''(x) = e^x - 1 > 0$.

On dresse alors le tableau de variations :

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f''(x)$	$+$
$f'(x)$	1 $\nearrow$
Signe de $f'(x)$	$+$
$f(x)$	1 $\nearrow$

On en déduit que pour tout x strictement positif, $f(x) > 0$ et donc $e^x > \frac{x^2}{2}$.

Soit encore : $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, on en déduit par comparaison de limites que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

- Dans le cas général, on a :

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$$

Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$ car on a vu que $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$.

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$, car n est positif.

Et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n = +\infty$, comme produit de n limites infinies.

Soit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

Méthode : Calculer une limite par croissance comparée

Vidéo https://youtu.be/GoLYLTZFaz0

Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2}$

Correction

● Le dénominateur comprend une forme indéterminée de type "$\infty - \infty$".
Levons l'indétermination :

$$\frac{e^x + x}{e^x - x^2} = \frac{e^x}{e^x} \times \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x^2}{e^x}} = \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x^2}{e^x}}$$

● Par croissance comparée : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et de même : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$.

Donc, comme inverse de limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$,

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{x^2}{e^x} = 1$.

● Donc, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{x}{e^x}}{1-\frac{x^2}{e^x}} = \frac{1}{1} = 1$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x+x}{e^x-x^2} = 1$.