# FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN (Partie 2)

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/VJns0RfVWGg

## I. Étude de la fonction logarithme népérien

### 1) Continuité et dérivabilité

Propriété : La fonction logarithme népérien est continue sur $]0\,;\,+\infty[$.

Propriété : La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Démonstration au programme :

Rappel : $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$

En posant : $u(x) = \ln x$, on a : $\left(e^{\ln x}\right)' = (\ln x)'e^{\ln x}$

Or $\left(e^{\ln x}\right)' = (x)' = 1$.

Donc : $(\ln x)'e^{\ln x} = 1$

Soit : $(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}}$

Soit encore : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Exemple :

**Vidéo** https://youtu.be/yiQ4Z5FdFQ8

Dériver la fonction suivante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ : $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2 \times \frac{1}{x} \times \ln x \times x - (\ln x)^2 \times 1}{x^2} \\
&= \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} \\
&= \ln x \frac{2 - \ln x}{x^2}
\end{aligned}
$$

### 2) Variations

Propriété : La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Démonstration :

Pour tout réel $x > 0$, $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$

### 3) Convexité

**Propriété :** La fonction logarithme népérien est concave sur $]0\,;\,+\infty[$.

Démonstration :
Pour tout réel $x > 0$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
$(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$ donc la dérivée de la fonction $ln$ est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$ et donc la fonction logarithme népérien est concave sur cet intervalle.

### 4) Limites aux bornes

**Propriétés :** $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

On dresse le tableau de variations de la fonction logarithme népérien :

| $x$ | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $(\ln x)'$ | \|\| | + | |
| $\ln x$ | \|\| | $-\infty \nearrow$ | $+\infty$ |

### 5) Tangentes particulières

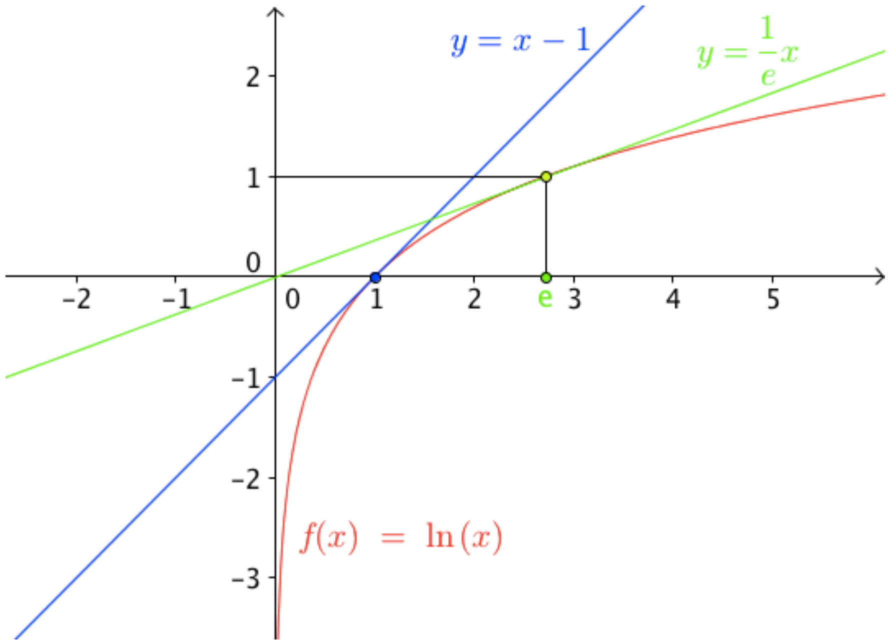
Rappel : Une équation de la tangente à la courbe $C_f$ au point d'abscisse $a$ est :
$y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Dans le cas de la fonction logarithme népérien, l'équation est de la forme :
$y = \frac{1}{a}(x - a) + \ln a$.

- Au point d'abscisse 1, l'équation de la tangente est $y = \frac{1}{1}(x - 1) + \ln 1$ soit :
$y = x - 1$.
- Au point d'abscisse $e$, l'équation de la tangente est $y = \frac{1}{e}(x - e) + \ln e$ soit :
$y = \frac{1}{e}x$.

### 6) Courbe représentative

Valeurs particulières :
$\ln 1 = 0$
$\ln e = 1$




## II. Croissance comparée des fonctions logarithme et puissances

Propriétés (croissances comparées) :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et pour tout entier non nul $n$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ et pour tout entier $n$, $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln x = 0$

Démonstration du b. dans les cas où $n$ = 1 (au programme) :

En posant $X = -\ln x$, on a : $x = e^{-X}$

Or, si $x$ tend vers 0, alors $X$ tend vers $+\infty$. Donc :

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = \lim_{X \to +\infty} e^{-X} \times (-X) = \lim_{X \to +\infty} -\frac{X}{e^X} = 0$$

Car $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$

Remarque : Les fonctions puissances imposent leur limite devant la fonction logarithme népérien.

Méthode : Déterminer une limite par croissance comparée

**Vidéo** https://youtu.be/lA3W_j4p-c8

**Vidéo** https://youtu.be/OYcsChr8src

$$a) \lim_{x \to +\infty} x - \ln x \qquad\qquad b) \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x - 1}$$

a) Il s'agit d'une forme indéterminée de type "$\infty - \infty$".

Levons l'indétermination :

$$x - \ln x = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{\ln x}{x} = 1$.
Et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ comme limite d'un produit.
Soit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln x = +\infty$.

b) Il s'agit d'une forme indéterminée de type "$\frac{\infty}{\infty}$".

Levons l'indétermination :

$$\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{\frac{\ln x}{x}}{1-\frac{1}{x}}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$, on a, comme limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{0}{1} = 0$$

Soit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-1} = 0$.

## III. Études de fonctions contenant des logarithmes

Méthode : Étudier les variations d'une fonction contenant des logarithmes

**Vidéo** https://youtu.be/iT9C0BiOK4Y

1) Déterminer les variations de la fonction $f$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par
$f(x) = 3 - x + 2\ln x$
2) Étudier la convexité de la fonction $f$.

1) Sur $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = -1 + \frac{2}{x} = \frac{2-x}{x}$$

Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2 - x$.
La fonction $f$ est donc strictement croissante sur $]0\,;2]$ et strictement décroissante sur $[2\,;\,+\infty[$.

On dresse le tableau de variations :

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ | ↗ | $1 + 2\ln 2$ | ↘ | |

$f(2) = 3 - 2 + 2\ln 2 = 1 + 2\ln 2$

2) Sur $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f''(x) = \frac{-1 \times x - (2 - x) \times 1}{x^2} = \frac{-x - 2 + x}{x^2} = \frac{-2}{x^2} < 0$$

La fonction $f'$ est donc décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$. On en déduit que la fonction $f$ est concave sur $]0\,;\,+\infty[$.

Méthode : Étudier la position relative de la courbe de la fonction logarithme et de la droite d'équation y = x

**Vidéo** https://youtu.be/0hQnOs_hcss

Étudier la position relative de la courbe de la fonction logarithme et de la droite d'équation $y = x$.

On considère la fonction $g$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x - \ln x$.

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Comme $x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $x - 1$.
On a également : $g(1) = 1 - \ln 1 = 1$

On dresse ainsi le tableau de variations :

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | \|\| | – | 0 | + | |
| $g(x)$ | \|\| | $\searrow$ | 1 | $\nearrow$ | |

On en déduit que pour tout $x$ de $]0\,;\,+\infty[$, on a $g(x) = x - \ln x \geq 1 > 0$ soit $x > \ln x$.
La fonction logarithme est située en dessous de la droite d'équation $y = x$.