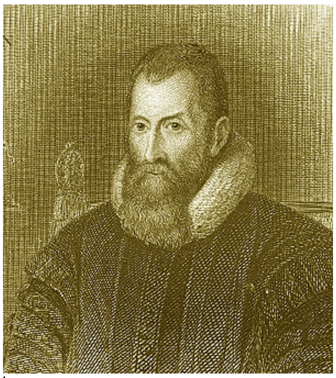
# FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL

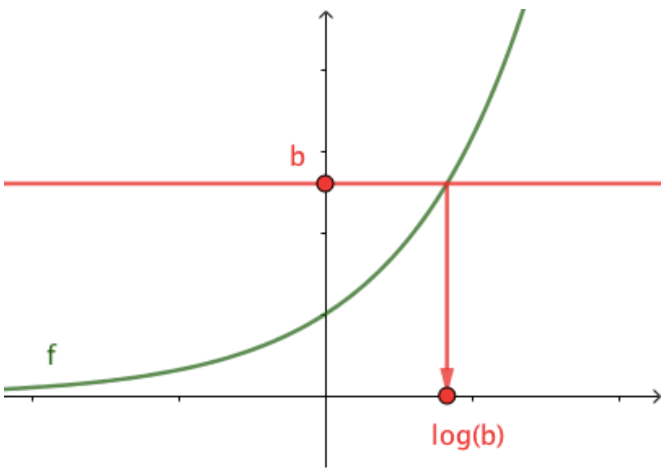


En 1614, un mathématicien écossais, *John Napier* (1550 ; 1617) ci-contre, plus connu sous le nom francisé de *Neper* publie « Mirifici logarithmorum canonis descriptio ».
Dans cet ouvrage, qui est la finalité d'un travail de 20 ans, *Neper* présente un outil permettant de simplifier les calculs opératoires : le logarithme.
*Neper* construit le mot à partir des mots grecs « logos » (logique) et arithmos (nombre).
Toutefois cet outil ne trouvera son essor qu'après la mort de Neper.
Les mathématiciens anglais *Henri Briggs* (1561 ; 1630) et *William Oughtred* (1574 ; 1660) reprennent et prolongent les travaux de Neper.
Les mathématiciens de l'époque établissent alors des tables de logarithmes de plus en plus précises.
L'intérêt d'établir ces tables logarithmiques est de permettre de substituer une multiplication par une addition (paragraphe II). Ceci peut paraître dérisoire aujourd'hui, mais il faut comprendre qu'à cette époque, les calculatrices n'existent évidemment pas, les nombres décimaux ne sont pas d'usage courant et les opérations posées telles que nous les utilisons ne sont pas encore connues. Et pourtant l'astronomie, la navigation ou le commerce demandent d'effectuer des opérations de plus en plus complexes.

## I. Définition et propriété de la fonction logarithme décimal

### 1) Définition

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 10^x$.
L'équation $10^x = b$, avec $b > 0$, admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
Cette solution se note $\log b$.

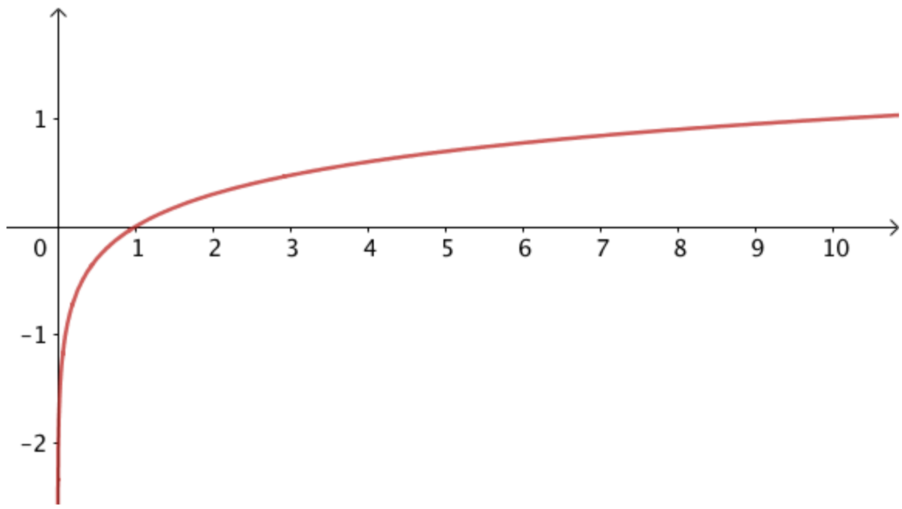


<u>Définition :</u> On appelle **logarithme décimal** d'un réel strictement positif $b$, l'unique solution de l'équation $10^x = b$. On la note $\log b$.
La **fonction logarithme décimal**, notée **log**, est la fonction :

$$\log : \;]0\,;\,+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \log x$$

<u>Conséquences :</u>
a) Pour $b > 0$ : $10^x = b$ revient à écrire $x = \log b$
b) $\log 10^x = x$
c) Pour $x > 0$ : $10^{\log x} = x$

2) <u>Sens de variation</u>




<u>Propriété :</u> La fonction logarithme décimal $x \longmapsto \log x$ est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

<u>Valeurs particulières :</u> $\log 1 = 0$ ; $\log 10 = 1$ ; $\log \frac{1}{10} = -1$

## II. <u>Propriétés de la fonction logarithme népérien</u>

<u>Méthode :</u> Simplifier une expression contenant des logarithmes

**Vidéo** [https://youtu.be/qdYQQlbz-AQ](https://youtu.be/qdYQQlbz-AQ)

Simplifier les expressions suivantes :

$A = \log(2-\sqrt{2}) + \log(2+\sqrt{2})$
$B = 2\log 3 + \log 2 - 4\log 3$
$C = \log 10^3 - \log \frac{1}{5}$

$A = \log(2-\sqrt{2}) + \log(2+\sqrt{2})$
$\quad = \log\left((2-\sqrt{2}) \times (2+\sqrt{2})\right)$

Pour $a > 0$ et $b > 0$ :
$\log(a \times b) = \log a + \log b$

$= \log(4-2) = \ln 2$

$B = 2\log 3 + \log 2 - 4\log 3$
$= \log 3^2 + \log 2 - \log(3^4)$

Pour $a > 0$ et $n$ entier naturel :
$\log a^n = n \log a$

$= \log(3^2 \times 2) - \log(3^4)$
$= \log \frac{3^2 \times 2}{3^4}$
$= \log \frac{2}{9}$

Pour $a > 0$ et $b > 0$ :
$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$

$C = \log 10^3 + \log \frac{1}{5}$
$= \log 10^3 - \log 5$
$= 3\log 10 - \log 5$
$= 3 \times 1 - \log 5$
$= 3 - \log 5$

Pour $b > 0$ :
$\log \frac{1}{b} = -\log b$

Remarque : La première formule permet de transformer un produit en somme.

Ainsi, celui qui aurait à effectuer 36 x 62, appliquerait cette formule, soit :
log(36 x 62) = log(36) + log(62) ≈ 1,5563 + 1,7924 (voir table ci-contre)

L'addition étant beaucoup plus simple à effectuer que la multiplication, on trouve facilement :
log(36 x 62) ≈ 3,3487

En cherchant dans la table, le logarithme égal à 3,3487, on trouve 2232, soit : 36 x 62 = 2232.

| $x$ | $log(x)$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | 0,3010 |
| 3 | 0,4771 |
| … | |
| 34 | 1,5315 |
| 35 | 1,5441 |
| 36 | 1,5563 |
| … | |
| 62 | 1,7924 |
| … | |
| 2231 | 3,3485 |
| 2232 | 3,3487 |
| 2233 | 3,3489 |
| … | |

## III. Équations et inéquations

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation

**Vidéo** https://youtu.be/WD2J0woQom0
**Vidéo** https://youtu.be/scxbiV4VEak

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $6^x = 2$

2) Résoudre dans $]0\,;\,+\infty[$ l'équation : $x^5 < 3$

3) 8 augmentations successives de $t$ % correspondent à une augmentation globale de 30 %. Donner une valeur approchée du taux moyen $t$.

1) $6^x = 2$

$\log 6^x = \log 2$

$x \log 6 = \log 2$

$x = \dfrac{\log 2}{\log 6}$

$\boxed{\log a = \log b \text{ revient à } a = b}$

2) $x^5 < 3$

$\log(x^5) < \log 3$

$5 \log x < \log 3$

$\log x < \dfrac{1}{5} \log 3$

$\log x < \log 3^{\frac{1}{5}}$

$x < 3^{\frac{1}{5}}$

$\boxed{\log a < \log b \text{ revient à } a < b}$

L'ensemble solution est $\left]0\,;\ 3^{\frac{1}{5}}\right[$.

Remarque : $3^{\frac{1}{5}}$ se lit *"racine cinquième de 3"* et peut se noter $\sqrt[5]{3}$.

3) Le problème revient à résoudre dans $]0\,;\ +\infty[$ l'équation :

$\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^8 = 1{,}3$

$\log\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^8 = \log 1{,}3$

$8 \log\left(1 + \dfrac{t}{100}\right) = \log 1{,}3$

$\log\left(1 + \dfrac{t}{100}\right) = \dfrac{1}{8} \log 1{,}3$

$\log\left(1 + \dfrac{t}{100}\right) = \log\left(1{,}3^{\frac{1}{8}}\right)$

$1 + \dfrac{t}{100} = 1{,}3^{\frac{1}{8}}$

$\dfrac{t}{100} = 1{,}3^{\frac{1}{8}} - 1$

$t = 100 \times \left(1{,}3^{\frac{1}{8}} - 1\right)$

$t \approx 3{,}3$

On retrouve la propriété suivante directement établie dans le chapitre « Fonctions exponentielles » :

Si $x^n = a$ alors $x = a^{\frac{1}{n}}$

Une augmentation globale de 30 % correspond à 8 augmentations successives d'environ 3,3 %.