

FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL



En 1614, un mathématicien écossais, *John Napier* (1550 ; 1617) ci-contre, plus connu sous le nom francisé de *Neper* publie « *Mirifici logarithmorum canonicis descriptio* ».

Dans cet ouvrage, qui est la finalité d'un travail de 20 ans, *Neper* présente un outil permettant de simplifier les calculs opératoires : le logarithme.

Neper construit le mot à partir des mots grecs « *logos* » (logique) et *arithmos* (nombre).

Toutefois cet outil ne trouvera son essor qu'après la mort de *Neper*. Les mathématiciens anglais *Henri Briggs* (1561 ; 1630) et *William Oughtred* (1574 ; 1660) reprennent et prolongent les travaux de *Neper*.

Les mathématiciens de l'époque établissent alors des tables de logarithmes de plus en plus précises.

L'intérêt d'établir ces tables logarithmiques est de permettre de substituer une multiplication par une addition (partie 2). Ceci peut paraître dérisoire aujourd'hui, mais il faut comprendre qu'à cette époque, les calculatrices n'existent évidemment pas, les nombres décimaux ne sont pas d'usage courant et les opérations posées telles que nous les utilisons ne sont pas encore connues. Et pourtant l'astronomie, la navigation ou le commerce demandent d'effectuer des opérations de plus en plus complexes.

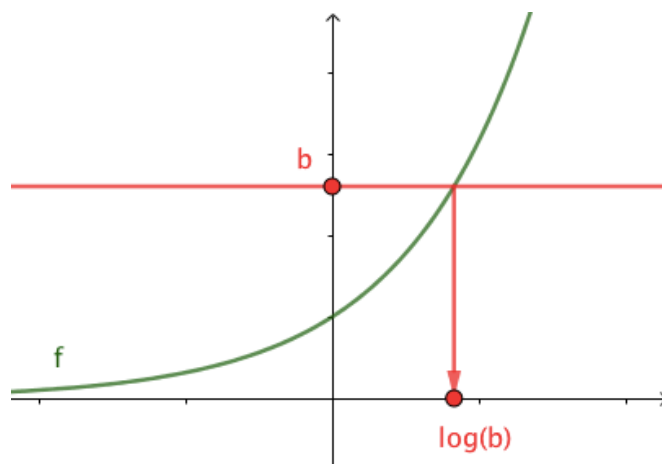
Partie 1 : Fonction exponentielle de base 10 et fonction logarithme décimal

1) Définition

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 10^x$.

L'équation $10^x = b$, avec $b > 0$, admet une unique solution dans \mathbb{R} .

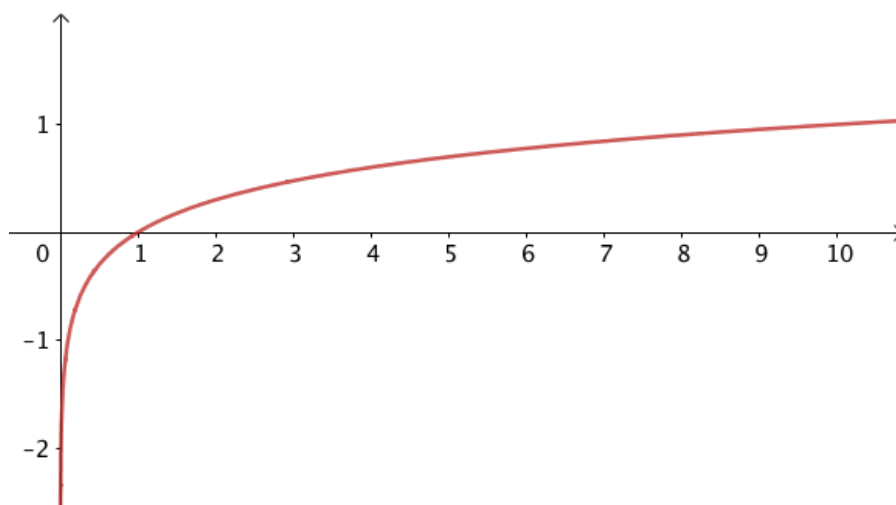
Cette solution se note $\log(b)$.



Définition : On appelle **logarithme décimal** d'un réel strictement positif b , l'unique solution de l'équation $10^x = b$. On la note $\log(b)$.

La **fonction logarithme décimal**, notée **log**, est la fonction :

$$x \mapsto \log(x)$$

Conséquences :a) Pour $b > 0$: $10^x = b$ revient à écrire $x = \log(b)$ b) $\log 10^x = x$ c) Pour $x > 0$: $10^{\log(x)} = x$ **2) Sens de variation****Propriété :** La fonction logarithme décimal $x \mapsto \log(x)$ est croissante sur $]0 ; +\infty[$.**Valeurs particulières :** $\log(1) = 0$; $\log(10) = 1$; $\log\left(\frac{1}{10}\right) = -1$ **Partie 2 : Propriétés de la fonction logarithme décimal****Méthode :** Simplifier une expression contenant des logarithmes
 **Vidéo** <https://youtu.be/qdYQQIbz-AQ>

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \log(2 - \sqrt{2}) + \log(2 + \sqrt{2})$$

$$B = 2 \log(3) + \log(2) - 4 \log(3)$$

$$C = \log(10^3) + \log\left(\frac{1}{5}\right)$$

Correction

$$\begin{aligned} A &= \log(2 - \sqrt{2}) + \log(2 + \sqrt{2}) \\ &= \log\left((2 - \sqrt{2}) \times (2 + \sqrt{2})\right) \\ &= \log(4 - 2) = \log(2) \end{aligned}$$

Pour $a > 0$ et $b > 0$:

$$\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$$

$$\begin{aligned} B &= 2 \log(3) + \log(2) - 4 \log(3) \\ &= \log(3^2) + \log(2) - \log(3^4) \end{aligned}$$

Pour $a > 0$ et n entier naturel :

$$\log(a^n) = n \log(a)$$

$$\log(\text{😄}) = \text{💧} \log(\text{😄})$$

$$\begin{aligned}
 &= \log(3^2 \times 2) - \log(3^4) \\
 &= \log\left(\frac{3^2 \times 2}{3^4}\right) \\
 &= \log\left(\frac{2}{9}\right)
 \end{aligned}$$

Pour $a > 0$ et $b > 0$:

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$\begin{aligned}
 C &= \log(10^3) + \log\left(\frac{1}{5}\right) \\
 &= \log(10^3) - \log(5) \\
 &= 3 \log(10) - \log(5) \\
 &= 3 \times 1 - \log(5) \\
 &= 3 - \log(5)
 \end{aligned}$$

Pour $b > 0$:

$$\log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log(b)$$

Remarque : Voici comment Neper transformait un produit en somme :

Celui qui aurait, par exemple, à effectuer 36×62 , appliquerait la formule précédente, soit :

$$\begin{aligned}
 \log(36 \times 62) &= \log(36) + \log(62) \\
 &\approx 1,5563 + 1,7924 \text{ (à l'aide de la table ci-contre)}
 \end{aligned}$$

L'addition étant beaucoup plus simple à effectuer que la multiplication, on trouve facilement :

$$\log(36 \times 62) \approx 3,3487$$

En cherchant à nouveau dans la table le logarithme égal à 3,3487, on trouve 2232, soit : $36 \times 62 = 2232$.

x	$\log(x)$
1	0
2	0,3010
3	0,4771
...	
34	1,5315
35	1,5441
36	1,5563
...	
62	1,7924
...	
2231	3,3485
2232	3,3487
2233	3,3489
...	

Partie 3 : Équations et inéquations

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation

▶ Vidéo <https://youtu.be/WD2J0woQom0>

▶ Vidéo <https://youtu.be/scxbiV4VEak>

1) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $6^x = 2$

2) Résoudre dans $]0 ; +\infty[$ l'équation : $x^5 < 3$

3) 8 augmentations successives de t % correspondent à une augmentation globale de 30 %. Donner une valeur approchée du taux moyen t .

Correction

$$\begin{aligned}
 1) \quad &6^x = 2 \\
 &\log(6^x) = \log(2) \\
 &x \log(6) = \log(2)
 \end{aligned}$$

$$\log(a) = \log(b) \text{ revient à } a = b$$

$$x = \frac{\log(2)}{\log(6)}$$

$$2) x^5 < 3$$

$$\log(x^5) < \log(3)$$

$$5 \log(x) < \log(3)$$

$$\log(x) < \frac{1}{5} \log(3)$$

$$\log(x) < \log\left(3^{\frac{1}{5}}\right)$$

$$x < 3^{\frac{1}{5}}$$

$\log(a) < \log(b)$ revient à $a < b$

L'ensemble solution est $]0 ; 3^{\frac{1}{5}}[$.

Remarque : $3^{\frac{1}{5}}$ se lit "racine cinquième de 3" et peut se noter $\sqrt[5]{3}$.

3) Le problème revient à résoudre dans $]0 ; +\infty[$ l'équation :

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^8 = 1,3$$

$$\log\left(1 + \frac{t}{100}\right)^8 = \log(1,3)$$

$$8 \log\left(1 + \frac{t}{100}\right) = \log(1,3)$$

$$\log\left(1 + \frac{t}{100}\right) = \frac{1}{8} \log(1,3)$$

$$\log\left(1 + \frac{t}{100}\right) = \log\left(1,3^{\frac{1}{8}}\right)$$

$$1 + \frac{t}{100} = 1,3^{\frac{1}{8}}$$

$$\frac{t}{100} = 1,3^{\frac{1}{8}} - 1$$

$$t = 100 \times \left(1,3^{\frac{1}{8}} - 1\right)$$

$$t \approx 3,3$$

On retrouve la propriété suivante directement établie dans le chapitre « Fonctions exponentielles » :

Si $x^n = a$ alors $x = a^{\frac{1}{n}}$

Une augmentation globale de 30 % correspond à 8 augmentations successives d'environ 3,3 %.

© Copyright

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales