

NOMBRES COMPLEXES – Chapitre 2/4

▶ Tout le cours en vidéo : <https://youtu.be/ABo2m52oEYw>

Dans tout le chapitre, on munit le plan d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Partie 1 : Représentation dans le plan complexe

1) Définitions

Définitions : a et b sont deux nombres réels.

- À tout nombre complexe $z = a + ib$, on associe son **image**, le point M de coordonnées $(a ; b)$ et tout vecteur \vec{w} de coordonnées $(a ; b)$.

- À tout point $M(a ; b)$ et à tout vecteur $\vec{w}(a ; b)$, on associe le nombre complexe $z = a + ib$ appelé **affiche** du point M et **affiche** du vecteur \vec{w} .

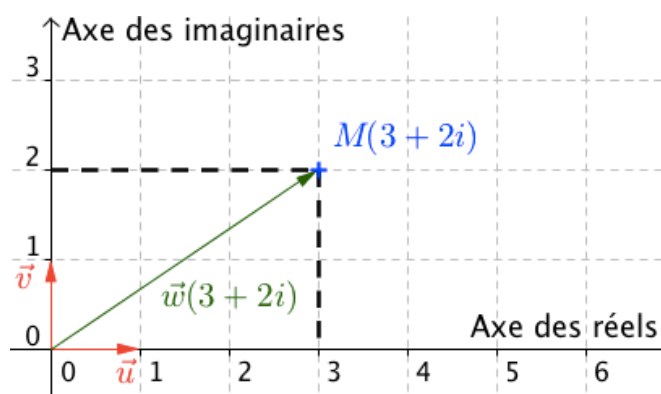
On note $M(z)$ et $\vec{w}(z)$.

Exemple :

▶ Vidéo https://youtu.be/D_yFqcCy3iE

Le point $M(3 ; 2)$ a pour affiche le nombre complexe $z = 3 + 2i$.

De même, le vecteur \vec{w} a pour affiche $z = 3 + 2i$.



2) Propriétés

Propriétés : $M(z_M)$ et $N(z_N)$ sont deux points du plan.

$\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ sont deux vecteurs du plan.

a) Le vecteur \overrightarrow{MN} a pour affiche $z_N - z_M$.

b) Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affiche $z + z'$.

c) Le vecteur $k\vec{u}$, k réel, a pour affiche kz .

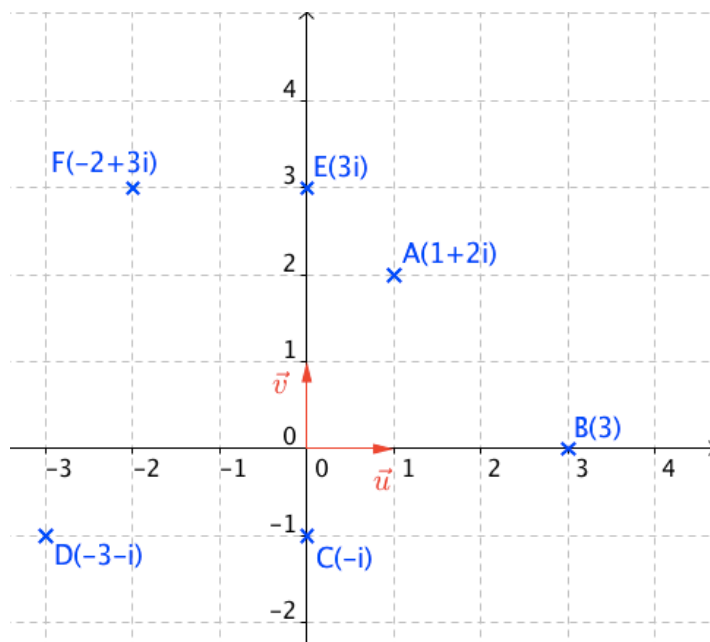
d) Le milieu I du segment $[MN]$ a pour affiche $z_I = \frac{z_M + z_N}{2}$

Démonstrations :

a) On pose : $M(x_M ; y_M)$ et $N(x_N ; y_N)$.

Le vecteur \overrightarrow{MN} a pour coordonnées $(x_N - x_M ; y_N - y_M)$ donc son affixe est égal à :
 $(x_N - x_M) + i(y_N - y_M) = x_N + iy_N - (x_M + iy_M) = z_N - z_M$.

b) c) et d) : Démonstrations analogues en passant par les coordonnées des vecteurs.

Autres exemples :**Méthode :** Utiliser l'affixe d'un point en géométrie

Vidéo <https://youtu.be/m9yM6kw1ZzU>

On considère les points $A(-2 + 3i)$, $B(2 + 4i)$, $C(5 + 3i)$, $D(1 + 2i)$ et $E(-7)$.

a) Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme. Calculer l'affixe de son centre.

b) Les points D , C et E sont-ils alignés ?

Correction

a) - On va démontrer que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{DC} sont égaux.

Affixe de \overrightarrow{AB} : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 2 + 4i - (-2 + 3i) = 4 + i$

Affixe de \overrightarrow{DC} : $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 5 + 3i - (1 + 2i) = 4 + i$

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et donc $ABCD$ est un parallélogramme.

- Le centre du parallélogramme est le milieu I du segment $[AC]$. Son affixe est :

$$z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{-2 + 3i + 5 + 3i}{2} = \frac{3 + 6i}{2} = \frac{3}{2} + 3i$$

b) On va démontrer que les vecteurs \overrightarrow{DC} et \overrightarrow{DE} sont colinéaires.

Affixe de \overrightarrow{DC} : $z_{\overrightarrow{DC}} = 4 + i$

Affixe de \overrightarrow{DE} : $z_{\overrightarrow{DE}} = z_E - z_D = -7 - (1 + 2i) = -8 - 2i$.

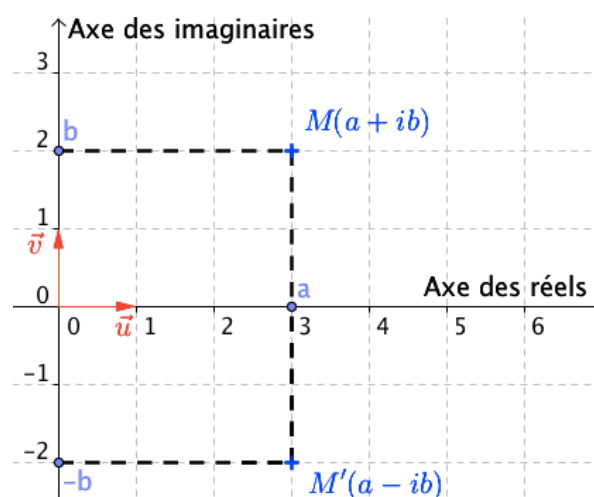
Donc : $z_{\overrightarrow{DE}} = -2 z_{\overrightarrow{DC}}$ et donc $\overrightarrow{DE} = -2 \overrightarrow{DC}$.

Les vecteurs \overrightarrow{DC} et \overrightarrow{DE} sont colinéaires et donc les points D , C et E sont alignés.

3) Image d'un conjugué

Remarque :

Les images M et M' de z et \bar{z} sont symétriques par rapport à l'axe des réels.



Partie 2 : Module et argument d'un nombre complexe

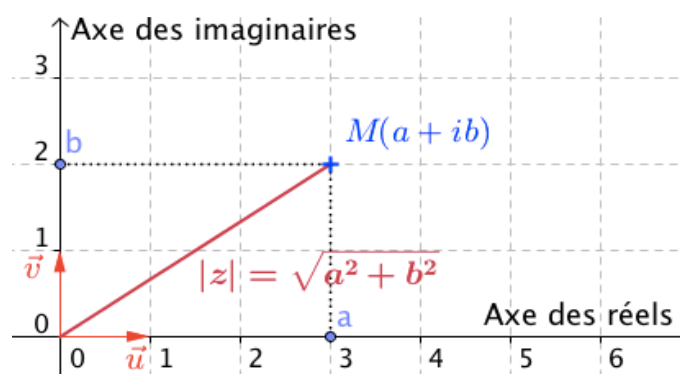
1) Module

Définition : Soit un nombre complexe $z = a + ib$.

On appelle **module** de z , le nombre réel positif, noté $|z|$, égal à $\sqrt{a^2 + b^2}$.

M est un point d'affixe z .

Alors le module de z est égal à la distance OM .



Propriétés : Soit z un nombre complexe.

a) $|z|^2 = z\bar{z}$

b) $|\bar{z}| = |z|$

c) $|-z| = |z|$

Démonstrations (dont a) au programme) :

a) $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

b) $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

c) $|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

Propriétés : Soit z et z' deux nombres complexes non nuls et n entier naturel non nul.	
Produit	$ zz' = z z' $
Puissance	$ z^n = z ^n$
Inverse	$\left \frac{1}{z}\right = \frac{1}{ z }$
Quotient	$\left \frac{z}{z'}\right = \frac{ z }{ z' }$

Démonstrations au programme :

- Module d'un produit :

On pose $\theta = \arg(z)$ et $\theta' = \arg(z')$.

$$\begin{aligned} zz' &= |z|(\cos \theta + i \sin \theta)|z'|(\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= |z||z'|((\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta')) \\ &= |z||z'|(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')) \end{aligned}$$

Donc le module de zz' est $|z||z'|$.

- Module d'une puissance :

On procède par récurrence.

- Initialisation pour $n = 2$: $|z^2| = |z \times z| = |z| \times |z| = |z|^2$, d'après la propriété du produit.

- Hérédité :

- Hypothèse de récurrence :

Supposons qu'il existe un entier $k > 1$ tel que la propriété soit vraie :

$$|z^k| = |z|^k.$$

- Démontrons que : La propriété est vraie au rang $k + 1$: $|z^{k+1}| = |z|^{k+1}$.

$$\begin{aligned} |z^{k+1}| &= |z^k z| \\ &= |z^k||z|, \text{ d'après la propriété du produit.} \\ &= |z|^k |z|, \text{ par hypothèse de récurrence.} \\ &= |z|^{k+1} \end{aligned}$$

- Conclusion :

La propriété est vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n , soit : $|z^n| = |z|^n$.

Méthode : Calculer le module d'un nombre complexe

 Vidéo <https://youtu.be/Hu0jjS5O2u4>

 Vidéo <https://youtu.be/i85d2fKv34w>

Calculer : a) $|3 - 2i|$ b) $|\overline{-3i}|$ c) $|\sqrt{2} + i|$ d) $\left| \frac{-3i}{(\sqrt{2} + i)^2} \right|$

Correction

a) $|3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

b) $|\overline{-3i}| = |-3i| = |-3||i| = 3 \times 1 = 3$

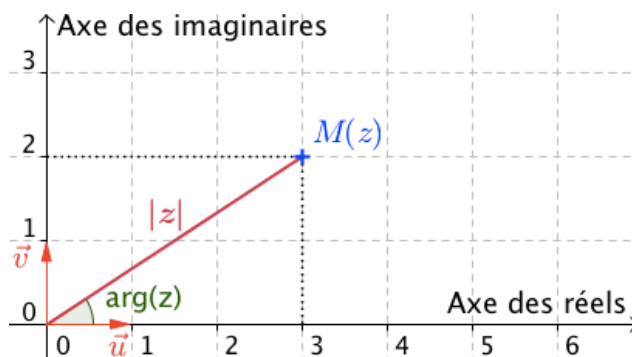
c) $|\sqrt{2} + i| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$$d) \left| \frac{-3i}{(\sqrt{2}+i)^2} \right| = \frac{|-3i|}{|(\sqrt{2}+i)^2|} = \frac{|-3i|}{|\sqrt{2}+i|^2} = \frac{3}{\sqrt{3}^2} = 1$$

2) Argument

Définition : Soit un point M d'affixe z non nulle.

On appelle **argument** de z , noté $\arg(z)$ une mesure, en radians, de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.



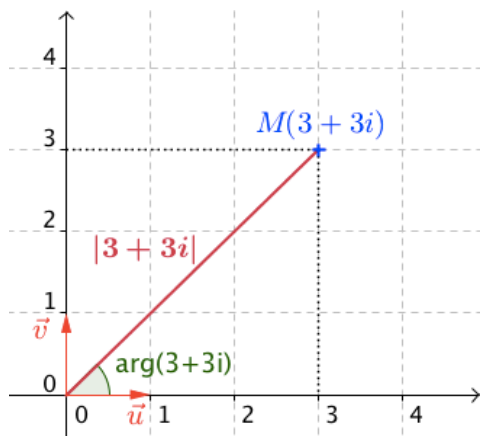
Remarques :

- Un nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments de la forme $\arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On notera $\arg(z)$ modulo 2π ou $\arg(z) [2\pi]$

- 0 n'a pas d'argument car dans ce cas l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$ n'est pas défini.

Exemple :



Soit $z = 3 + 3i$.

Alors $|z| = |3 + 3i| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$$\arg(z) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

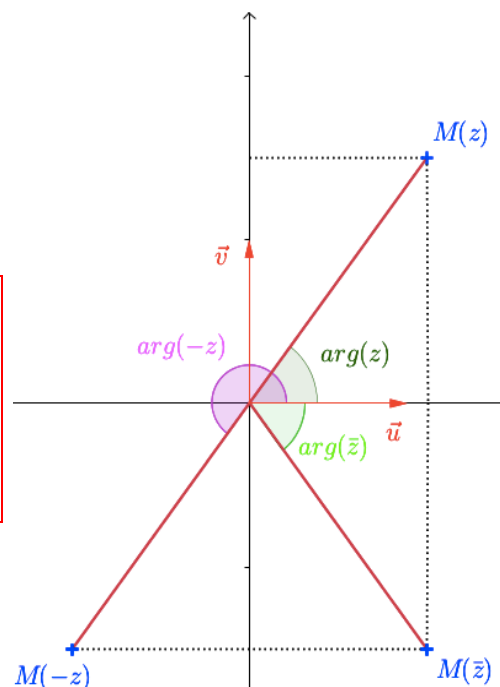
Propriétés : Soit z un nombre complexe non nul.

a) z est un nombre réel $\Leftrightarrow \arg(z) = 0[\pi]$.

b) z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} [\pi]$.

c) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$

d) $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$



Démonstrations :

- a) Le point M d'affixe z appartient à l'axe des réels.
 b) Le point M d'affixe z appartient à l'axe des imaginaires.
 c) d) Ses résultats se déduisent par symétrie.

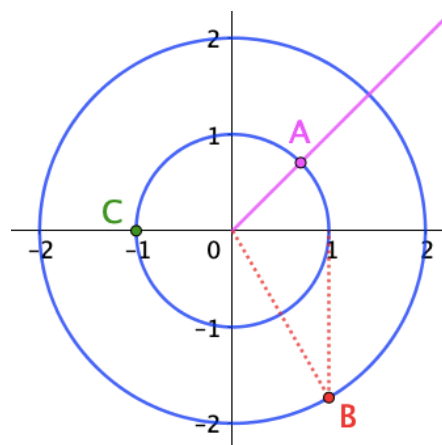
Méthode : Déterminer géométriquement un argument

▶ Vidéo <https://youtu.be/NX3pzPL2gwc>

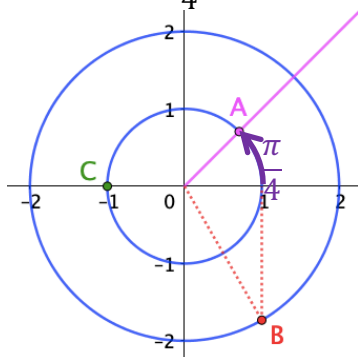
- a) Déterminer un argument de chaque affixe des points A, B et C.
 b) Placer les points D et E d'affixes respectives z_D et z_E telles que :

$$|z_D| = 2 \text{ et } \arg(z_D) = -\frac{2\pi}{3} [2\pi].$$

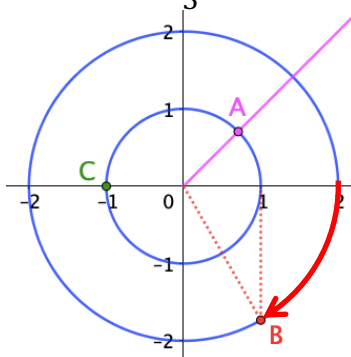
$$|z_E| = 3 \text{ et } \arg(z_E) = \frac{3\pi}{4} [2\pi].$$

**Correction**

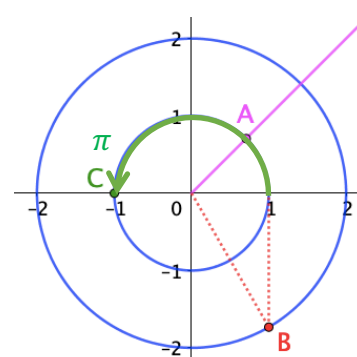
a) $\arg(z_A) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$



$\arg(z_B) = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$

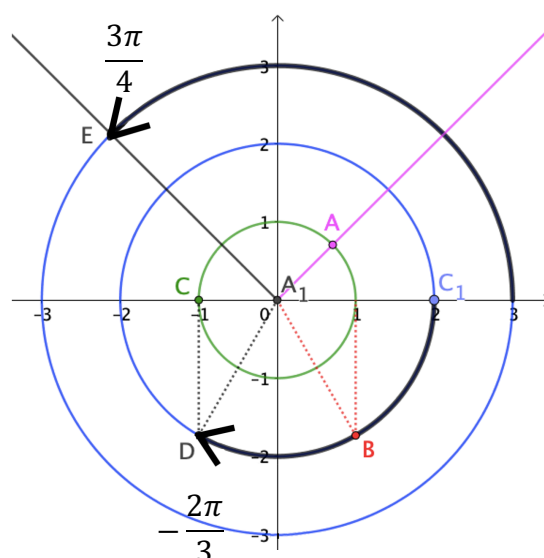


$\arg(z_C) = \pi [2\pi]$



- b) Le point D appartient au cercle de rayon 2 car $|z_D| = 2$.

Le point E appartient au cercle de rayon 3 car $|z_E| = 3$.



Propriétés : Soit z et z' deux nombres complexes non nuls et n entier naturel non nul.	
Produit	$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
Puissance	$\arg(z^n) = n \arg(z)$
Inverse	$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$
Quotient	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

Partie 3 : Forme trigonométrique d'un nombre complexe

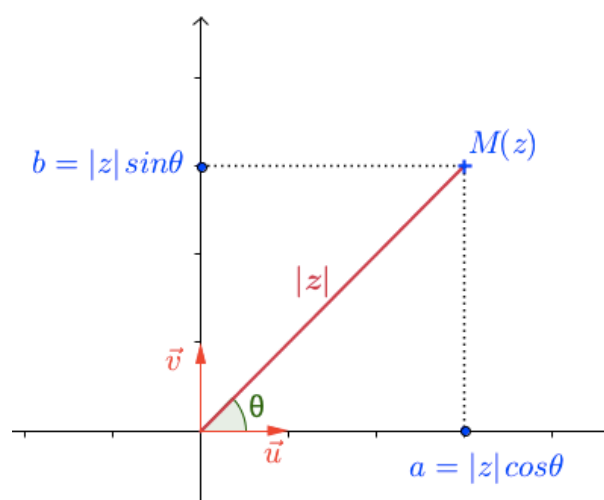
1) Définition

Propriété : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. On pose : $\theta = \arg(z)$
On a alors : $a = |z| \cos \theta$ et $b = |z| \sin \theta$.

En effet, en considérant le triangle rectangle, on a :

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|}$$

$$\sin \theta = \frac{b}{|z|}$$



Définition : On appelle **forme trigonométrique** d'un nombre complexe z non nul l'écriture $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $\theta = \arg(z)$.

Méthode : Passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique et réciproquement

▶ Vidéo <https://youtu.be/kmb3-hNiBq8>

▶ Vidéo <https://youtu.be/zlbpXlglSc4>

▶ Vidéo <https://youtu.be/RqRQ2m-9Uhw>

1) Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$$a) z_1 = 3(\cos \pi + i \sin \pi) \quad b) z_2 = \sqrt{3} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)$$

2) Écrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

$$a) z_3 = -5i \quad c) z_4 = \sqrt{3} + i$$

Correction

$$1) a) z_1 = 3(\cos \pi + i \sin \pi) = 3(-1 + i \times 0) = -3.$$

$$b) z_2 = \sqrt{3} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$2) a) |z_3| = |-5i| = 5$$

Géométriquement (cercle trigo), on peut affirmer que : $\arg(z_3) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

$$\text{Donc : } z_3 = 5 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right).$$

b) - On commence par calculer le module de z_4 :

$$|z_4| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

- En calculant $\frac{z_4}{|z_4|}$, on peut identifier plus facilement la partie réelle de z_4 et sa partie imaginaire :

$$\frac{z_4}{|z_4|} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$$

On cherche donc un argument θ de z_4 tel que :

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ convient, en effet :

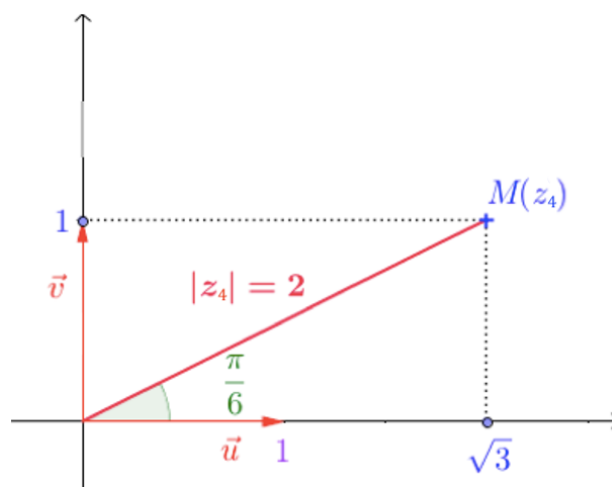
$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

On a ainsi :

$$\frac{z_4}{|z_4|} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$$

Et donc :

$$z_4 = |z_4| \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

**Partie 4 : Ensemble \mathbb{U} des nombres complexes de module 1**1) Cercle trigonométrique

L'ensemble des points du plan complexe (O, \vec{u}, \vec{v}) dont l'affixe appartient au cercle de centre O et de rayon 1 est noté \mathbb{U} . Ce cercle s'appelle le cercle trigonométrique.

Propriété : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe appartenant à \mathbb{U} .

On a alors $a^2 + b^2 = 1$.

2) Stabilité de \mathbb{U}

Méthode : Prouver que \mathbb{U} est stable par produit et passage à l'inverse

 Vidéo <https://youtu.be/XTNkoNfFopw>

Soit z et z' deux nombres complexes appartenant à \mathbb{U} .

Démontrer que zz' et $\frac{1}{z}$ appartiennent à \mathbb{U} .

Correction

$$\begin{aligned} - |zz'| &= |z||z'| \\ &= 1 \times 1 \text{ car } z \text{ et } z' \text{ appartiennent à } \mathbb{U}. \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc le produit zz' a pour module 1 et appartient donc à \mathbb{U} .

On dit que \mathbb{U} est stable par produit.

$$\begin{aligned} - \left| \frac{1}{z} \right| &= \frac{1}{|z|} \\ &= \frac{1}{1} \text{ car } z \text{ appartient à } \mathbb{U}. \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc l'inverse $\frac{1}{z}$ a pour module 1 et appartient donc à \mathbb{U} .

On dit que \mathbb{U} est stable par passage à l'inverse.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales