NOMBRES COMPLEXES (Partie 2)

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/ABo2m52oEYw

Dans tout le chapitre, on munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

I. Représentation dans le plan complexe

1) Définitions

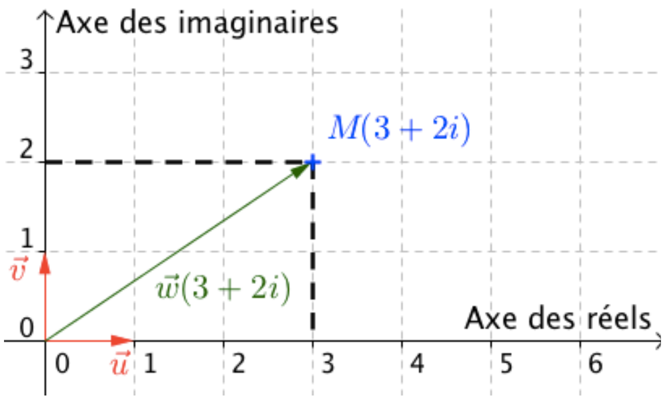
Définitions : a et b sont deux nombres réels.
- À tout nombre complexe $z = a + ib$, on associe son **image**, le point M de coordonnées $(a\,;b)$ et tout vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(a\,;b)$.
- À tout point $M(a\,;b)$ et à tout vecteur $\vec{w}(a\,;b)$, on associe le nombre complexe $z = a + ib$ appelé **affixe** du point M et **affixe** du vecteur $\vec{w}$.

On note $M(z)$ et $\vec{w}(z)$.

Exemple :

Vidéo https://youtu.be/D_yFqcCy3iE

Le point $M(3\,;2)$ a pour affixe le nombre complexe $z = 3 + 2i$.
De même, le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe $z = 3 + 2i$.



2) Propriétés

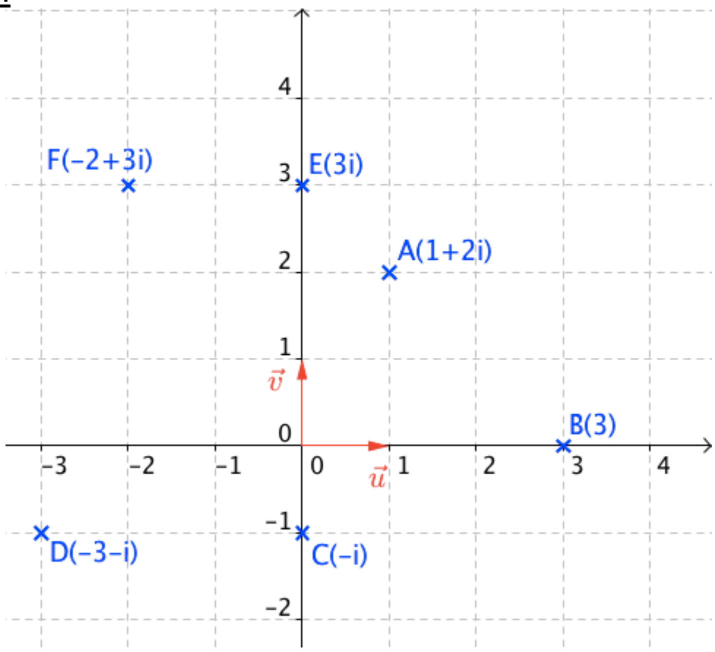
Propriétés : $M(z_M)$ et $N(z_N)$ sont deux points du plan.
$\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ sont deux vecteurs du plan.
a) Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour affixe $z_N - z_M$.
b) Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$.
c) Le vecteur $k\vec{u}$, k réel, a pour affixe kz.
d) Le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z_M + z_N}{2}$

Démonstrations :
a) On pose : $M(x_M\,;\,y_M)$ et $N(x_N\,;\,y_N)$.
Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $(x_N - x_M\,;\,y_N - y_M)$ donc son affixe est égal à :

$(x_N - x_M) + i(y_N - y_M) = x_N + iy_N - (x_M + iy_M) = z_N - z_M$.

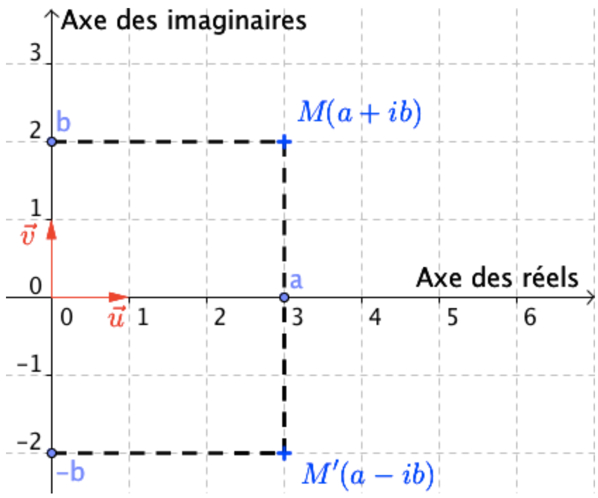
b) c) et d) : Démonstrations analogues en passant par les coordonnées des vecteurs.

Autres exemples :



3) Image d'un conjugué

Remarque :
Les images M et M' de z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

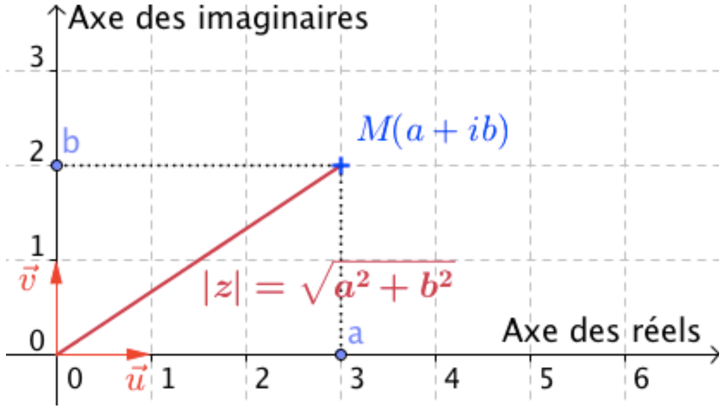


II. Module et argument d'un nombre complexe

1) Module

Définition : Soit un nombre complexe $z = a + ib$.
On appelle **module** de z, le nombre réel positif, noté $|z|$, égal à $\sqrt{a^2 + b^2}$.

M est un point d'affixe z.
Alors le module de z est égal à la distance OM.



Propriétés : Soit z et z' deux nombres complexes.
a) $|z|^2 = z\bar{z}$ b) $|\bar{z}| = |z|$ c) $|-z| = |z|$

Démonstrations dont a) au programme :
a) $z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

b) $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$

c) $|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$

Méthode : Calculer le module d'un nombre complexe

Vidéo https://youtu.be/Hu0jjS5O2u4

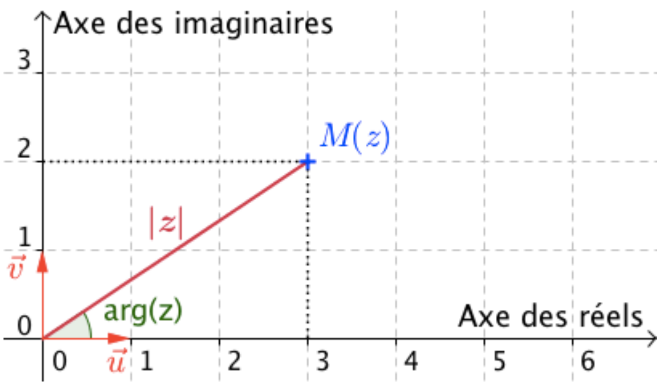
Calculer : a) $|3-2i|$ b) $|-3i|$ c) $\left|\overline{\sqrt{2}-i}\right|$

a) $|3-2i| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$ b) $|-3i| = |-3||i| = 3 \times 1 = 3$

c) $\left|\overline{\sqrt{2}-i}\right| = |\sqrt{2}+i| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

2) Argument

Définition : Soit un point M d'affixe z non nulle.
On appelle **argument** de z, noté $arg(z)$ une mesure, en radians, de l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$.

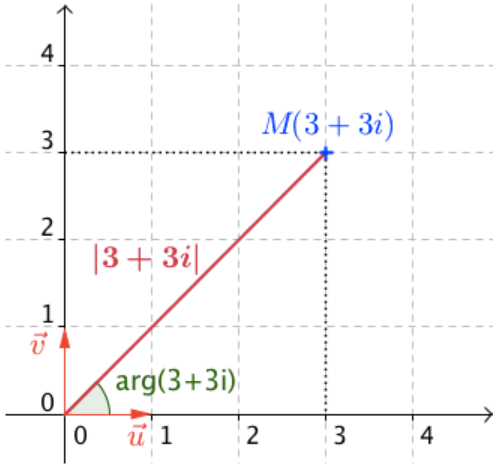


Remarques :
- Un nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments de la forme $arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
On notera $arg(z)$ modulo 2π ou $arg(z)\ [2\pi]$
- 0 n'a pas d'argument car dans ce cas l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$ n'est pas défini.

Exemple :

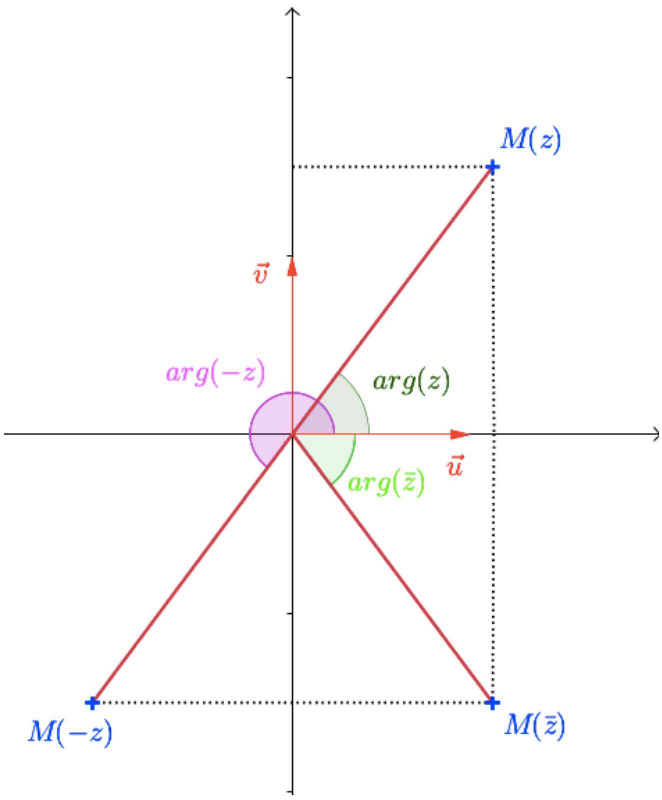
Soit $z = 3 + 3i$.
Alors $|z| = |3 + 3i| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$$arg(z) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$$



Propriétés : Soit z un nombre complexe non nul.
a) z est un nombre réel $\Leftrightarrow arg(z) = 0[\pi]$.
b) z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow arg(z) = \frac{\pi}{2}[\pi]$.
c) $arg(\bar{z}) = -arg(z)$
d) $arg(-z) = arg(z) + \pi$

Démonstrations :
a) Le point M d'affixe z appartient à l'axe des réels.
b) Le point M d'affixe z appartient à l'axe des imaginaires.
c) d) Ses résultats se déduisent par symétrie.



III. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

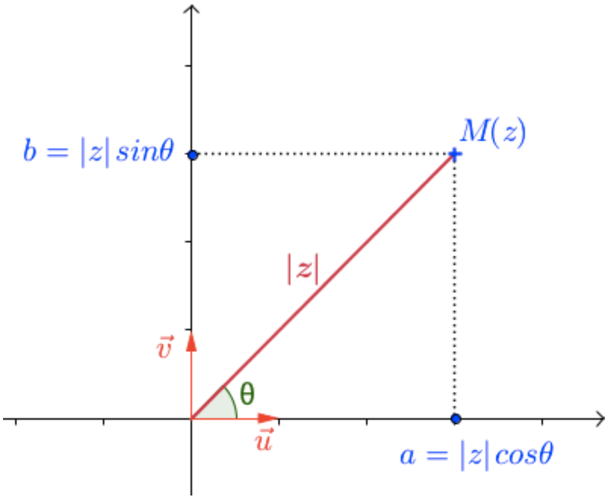
1) Définition

Propriété : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. On pose : $\theta = arg\ (z)$
On a alors : $a = |z| \cos\theta$ et $b = |z| \sin\theta$.

En effet, en considérant le triangle rectangle, on a :

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{|z|}$$



Définition : On appelle **forme trigonométrique** d'un nombre complexe z non nul l'écriture $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\theta = arg\ (z)$.

Méthode : Ecrire un nombre complexe sous sa forme trigonométrique

Vidéo https://youtu.be/zlbpXlgISc4

Écrire le nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$ sous sa forme trigonométrique.

- On commence par calculer le module de z :

$$|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

- En calculant $\frac{z}{|z|}$, on peut identifier plus facilement la partie réelle de z et sa partie imaginaire :

$$\frac{z}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

On cherche donc un argument θ de z tel que :

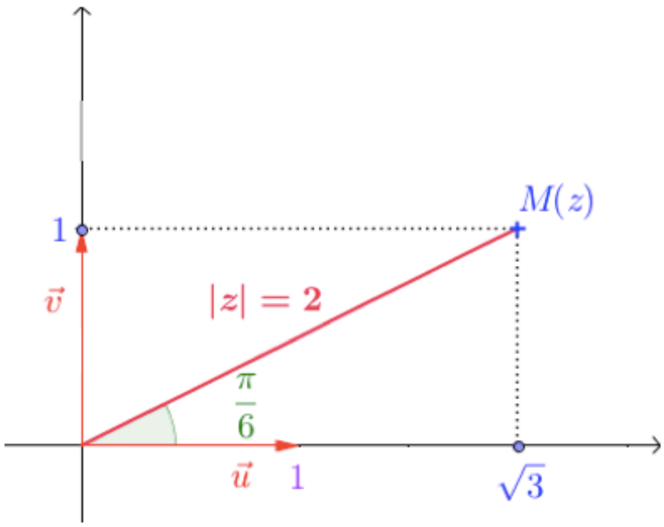
$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad et \quad \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ convient, en effet :

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

On a ainsi :

$$\frac{z}{|z|} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$$



Et donc :

$$z = |z|\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

2) Propriétés

Propriétés :
Soit z et z' deux nombres complexes non nuls et n entier naturel non nul.

Produit	$\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert\lvert z'\rvert$	$arg(zz') = arg(z) + arg(z')$
Puissance	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$	$arg(z^n) = n\, arg(z)$
Inverse	$\left\lvert\frac{1}{z}\right\rvert = \frac{1}{\lvert z\rvert}$	$arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg\ (z)$
Quotient	$\left\lvert\frac{z}{z'}\right\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$	$arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg\ (z) - arg\ (z')$

Démonstration au programme pour le module :

- Module d'un produit :
On pose $\theta = arg\ (z)$ et $\theta' = arg\ (z')$.

$$\begin{aligned} zz' &= |z|(\cos\theta + i\sin\theta)|z'|(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= |z||z'|(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta') \\ &= |z||z'|(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')) \end{aligned}$$

Donc le module de zz' est $|z||z'|$.

- Module d'une puissance :
On procède par récurrence.

- L'initialisation pour $n = 1$ est triviale.
- Hérédité :
  - Hypothèse de récurrence :
  Supposons qu'il existe un entier $k > 1$ tel que la propriété soit vraie : $|z^k| = |z|^k$.
  - Démontrons que : La propriété est vraie au rang $k+1$: $|z^{k+1}| = |z|^{k+1}$.

$|z^{k+1}| = |z^k z|$
$= |z^k||z|$, d'après la propriété du produit.
$= |z|^k|z|$, par hypothèse de récurrence.
$= |z|^{k+1}$

- Conclusion :

La propriété est vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit : $|z^n| = |z|^n$.

IV. Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

1) Cercle trigonométrique

L'ensemble des points du plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$ dont l'affixe appartient au cercle de centre O et de rayon 1 est noté $\mathbb{U}$. Ce cercle s'appelle le cercle trigonométrique.

Propriété : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe appartenant à $\mathbb{U}$.
On a alors $a^2 + b^2 = 1$.

2) Stabilité de $\mathbb{U}$

Méthode : Prouver que $\mathbb{U}$ est stable par produit et passage à l'inverse

Soit z et z' deux nombres complexes appartenant à $\mathbb{U}$.
Démontrer que zz' et $\frac{1}{z}$ appartiennent à $\mathbb{U}$.

- $|zz'| = |z||z'|$
$= 1 \times 1$ car z et z' appartiennent à $\mathbb{U}$.
$= 1$

Donc le produit zz' a pour module 1 et appartient donc à $\mathbb{U}$.
On dit que $\mathbb{U}$ est stable par produit.

- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
$= \frac{1}{1}$ car z appartient à $\mathbb{U}$.
$= 1$

Donc l'inverse $\frac{1}{z}$ a pour module 1 et appartient donc à $\mathbb{U}$.
On dit que $\mathbb{U}$ est stable par passage à l'inverse.