NOMBRES COMPLEXES – Chapitre 3/4

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/ABo2m52oEYw

Partie 1 : Formules de trigonométrie

1) Formules d'addition

Propriété : Soit a et b deux nombres réels quelconques. On a :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

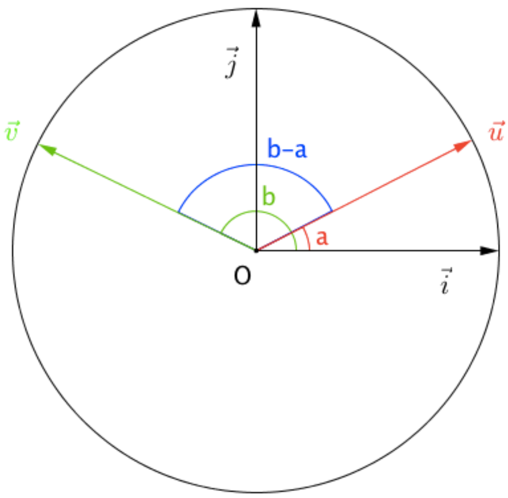
Démonstrations aux programmes :

- 1ère formule :

On considère un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan et le cercle trigonométrique de centre O.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de norme 1 tels que :

$(\vec{\imath}\,;\vec{u}) = a$ et $(\vec{\imath}\,;\vec{v}) = b$.



On a alors : $\vec{u}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$.

Ainsi : $\vec{u}.\vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

On a également :

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$

$= 1 \times 1 \times \cos(b-a) = \cos(a-b)$

D'où : $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

- 2e formule :

$\cos(a+b) = \cos\big(a-(-b)\big) = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

- 3e formule :

$$\begin{aligned}\sin(a-b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(a-b)\right)\\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+b\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin b\\ &= \sin a \cos b - \cos a \sin b\end{aligned}$$

- 4e formule :

$\sin(a+b) = \sin\big(a-(-b)\big) = \sin a \cos(-b) - \cos a \sin(-b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Méthode : Calculer des valeurs de cos et sin à l'aide des formules d'addition

Vidéo https://youtu.be/WcTWAazcXds

Calculer : $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

Correction

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

2) Formules de duplication

Propriété : Soit a un nombre réel quelconque. On a :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin(2a) = 2\cos a \sin a$$

Démonstrations :

Cas particulier des 2e et 4e formules d'addition dans le cas où $a = b$:

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$

$\sin(2a) = 2\cos a \sin a$

On a également : $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ donc :

$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1-\cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1$

Et :

$\cos^2 a - \sin^2 a = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$

Méthode : Calculer des valeurs de cos et sin à l'aide des formules de duplication

Vidéo https://youtu.be/RPtAUl3oLco

Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$

Correction

$$\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$$

Donc :

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

et donc :

$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$
car $\cos\frac{\pi}{8}$ est positif.

$\sin^2\frac{\pi}{8} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{8} = 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$
et donc :
$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$
car $\sin\frac{\pi}{8}$ est positif.

Méthode : Résoudre une équation trigonométrique

Vidéo https://youtu.be/yx3yULqR_wI

Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ l'équation $\cos(2x) = \sin x$.

Correction
$\cos(2x) = \sin x$ soit $1 - 2\sin^2 x = \sin x$ d'après une formule de duplication.
On pose $X = \sin x$, l'équation s'écrit alors : $1 - 2X^2 = X$
Soit : $2X^2 + X - 1 = 0$

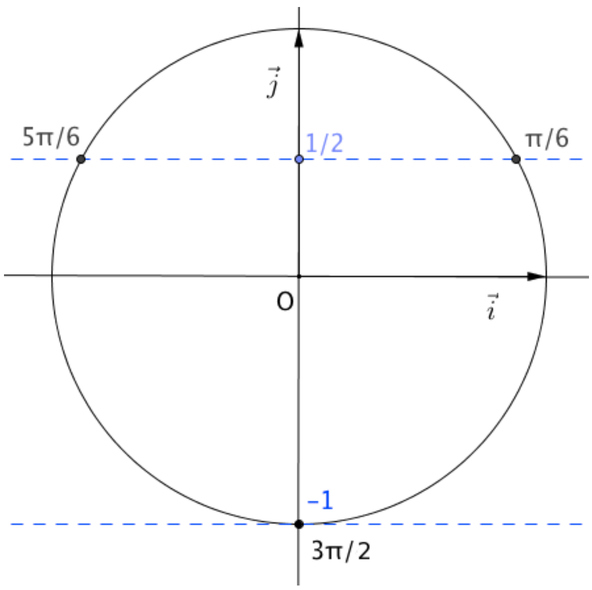
$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9$
L'équation du second degré possède deux solutions distinctes :

$$X_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \qquad et \qquad X_2 = \frac{-1-3}{4} = -1$$

Résolvons alors dans $[0\,;2\pi]$ les équations : $\sin x = \frac{1}{2}$ et $\sin x = -1$:

$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \quad ou \quad x = \frac{5\pi}{6}$

$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2}$



Ainsi :
$S = \left\{\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\,;\frac{3\pi}{2}\right\}$

Partie 2 : Forme exponentielle d'un nombre complexe

1) Définition

Posons $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$.
On prend $|z| = |z'| = 1$ et on a vu dans le chapitre 2/3 que :
$\arg(zz') = \arg z + \arg(z')$, soit :
$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$
Soit : $f(\theta)f(\theta') = f(\theta+\theta')$.
On retrouve ainsi la même équation fonctionnelle que celle établie pour les exponentielles :
$e^{\theta}e^{\theta'} = e^{\theta+\theta'}$.

Définition : Pour tout réel θ, on a : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Remarque :
$e^{i\theta}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ.

Propriété : $e^{i\pi} = -1$

Démonstration :
$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i\times 0 = -1$

Cette relation a été établie en 1748 par le mathématicien suisse *Leonhard Euler* (1707 ; 1783). Elle possède la particularité de relier les grandes branches des mathématiques : l'analyse (avec le nombre *e*), l'algèbre (avec le nombre *i*) et la géométrie (avec le nombre π).

Exemples :
$e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + i\times 0 = 1$
$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i\times 1 = i$

Définition : Tout nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ s'écrit sous sa **forme exponentielle** $z = re^{i\theta}$.

Méthode : Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle et réciproquement

Vidéo https://youtu.be/WSW6DIbCS_0
Vidéo https://youtu.be/tEKJVKKQazA
Vidéo https://youtu.be/zdxRt5poJp0

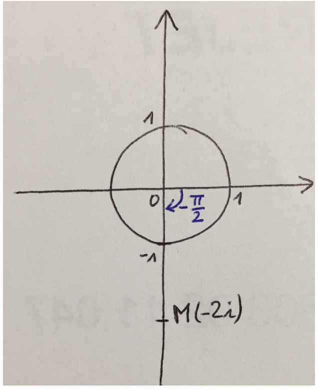
1) Écrire les nombres complexes suivants sous la forme exponentielle :
a) $z_1 = -2i$ b) $z_2 = -3$ c) $z_3 = \sqrt{3} - 3i$
2) Écrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique :
a) $z_4 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ b) $z_5 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

Correction

1) a) - $|z_1| = |-2i| = |-2| \times |i| = 2 \times 1 = 2$

- Pour déterminer un argument de z_1, on peut utiliser le cercle trigonométrique.

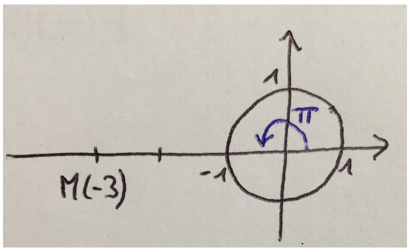
On fait un petit schéma à main levée en plaçant le point M d'affixe z_1 et on lit graphiquement qu'un argument de z_1 est $-\frac{\pi}{2}$.



Ainsi, on a : $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

b) - $|z_2| = |-3| = 3$

- On place le point M d'affixe z_2 et on lit graphiquement qu'un argument de z_2 est π.



Ainsi, on a : $z_2 = 3e^{i\pi}$.

c) $|z_3| = |\sqrt{3} - 3i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-3)^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

- Il n'est pas évident de déterminer graphiquement un argument de z_3. La méthode consiste alors à calculer $\frac{z_3}{|z_3|}$:

$$\frac{z_3}{|z_3|} = \frac{\sqrt{3} - 3i}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{3i}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \frac{3i \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \frac{3i \times \sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

On cherche donc un argument θ de z_3 tel que :

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \qquad et \qquad \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Comme, on a :

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \qquad et \qquad \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'argument $\theta = -\frac{\pi}{3}$ convient. Et ainsi :

$\frac{z_3}{|z_3|} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Soit :

$z_3 = |z_3|\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

2) $a)\ z_4 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$b)\ z_5 = 4e^{i\frac{\pi}{4}} = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

2) Propriétés

Propriétés : Pour tous réels θ et θ',

a) $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ b) $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ c) $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$ d) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

Méthode : Appliquer la notation exponentielle

Vidéo https://youtu.be/8EVfyqyVBKc

1) Déterminer la forme exponentielle de $z = 1 + i\sqrt{3}$.
2) En déduire la forme exponentielle des nombres suivants :

a) iz b) $i\bar{z}$ c) $-\frac{2i}{z}$

Correction

1) $z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

2) a) $iz = 2ie^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

b) $i\bar{z} = 2ie^{-i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

c) $-\frac{2i}{z} = \frac{2\times(-i)}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

3) Formules de Moivre et d'Euler

Formule de Moivre : Pour tous réels θ et θ', pour tout entier naturel n non nul :

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

Que l'on peut également écrire : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Méthode : Appliquer la formule de Moivre

Vidéo https://youtu.be/RU2C4i3n5Ik

Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$.

Correction

$\cos(3x) = Re\,(\cos(3x) + i\sin(3x))$

Or, selon la formule de Moivre :
$\cos(3x) + i\sin(3x) = (\cos x + i\sin x)^3$
$= \cos^3 x + 3i\cos^2 x \sin x + 3i^2 \cos x \sin^2 x + i^3 \sin^3 x$, en appliquant la formule du binôme de Newton pour développer.

Soit :
$\cos(3x) + i\sin(3x) = \cos^3 x + 3i\cos^2 x \sin x - 3\cos x \sin^2 x - i\sin^3 x$
$= \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x + i(3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x)$
On en déduit que : $\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$

Or, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, donc :
$\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x\,(1 - \cos^2 x)$
$= \cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^3 x$
$= 4\cos^3 x - 3\cos x$

Formules d'Euler : Pour tout réel θ:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Méthode : Appliquer les formules d'Euler

Vidéo https://youtu.be/p6TncUjPKfQ

a) Linéariser (*) l'expression $\cos^3 x$.
b) En déduire une primitive de la fonction $x \longmapsto \cos^3 x$.

(*) Linéariser une telle expression consiste à la ramener comme somme d'expressions du type $\cos ax$ et $\sin ax$.

Correction
a) On applique une formule d'Euler :

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{8}\left(\left(e^{ix}\right)^3 + 3\left(e^{ix}\right)^2 e^{-ix} + 3e^{ix}\left(e^{-ix}\right)^2 + \left(e^{-ix}\right)^3\right),$$

en appliquant la formule du binôme de Newton pour développer.

Soit encore :

$$\cos^3 x = \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right)$$
$$= \frac{1}{8}(\cos 3x + i\sin 3x + 3\cos x + 3i\sin x + 3\cos x - 3i\sin x + \cos 3x - i\sin 3x)$$
$$= \frac{1}{8}(\cos 3x + 3\cos x + 3\cos x + \cos 3x)$$
$$= \frac{1}{8}(2\cos 3x + 6\cos x)$$

$$= \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$$

b) Ainsi, chercher une primitive de $\cos^3 x$ revient à chercher une primitive de $\frac{1}{4}\left(\cos 3x + 3\cos x\right)$.

Une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$ est la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + 3\sin x\right) = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$$

DIVERTISSEMENT

Une démonstration avec les nombres complexes de la célèbre égalité $cos^2(x) + sin^2(x) = 1$.

$cos^2(x) + sin^2(x)$
$= cos^2(x) - i^2\, sin^2(x)$
$= (\cos(x) - i\sin(x))\,(\cos(x) + i\sin(x))$
$= e^{-ix}e^{ix}$
$= e^{-ix+ix}$
$= e^0$
$= 1$