

# NOMBRES COMPLEXES – Chapitre 2/2

## Partie 1 : Formules de trigonométrie

### 1) Formules d'addition

**Propriété :** Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels quelconques. On a :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

### Démonstrations :

On a vu que :  $e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib}$

Soit :  $\cos(a + b) + i \sin(a + b) = (\cos a + i \sin a) \times (\cos b + i \sin b)$

$$\cos(a + b) + i \sin(a + b) = \cos a \cos b + i \cos a \sin b + i \sin a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a + b) + i \sin(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b + i (\cos a \sin b + \sin a \cos b)$$

D'où :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$$

**Remarques :** En remplaçant  $b$  par  $-b$ , on a également les formules :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

**Méthode :** Transformer à l'aide des formules d'addition  $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$  en  $A \cos(\omega t + \varphi)$

 **Vidéo** <https://youtu.be/8NdfUiLaZAc>

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(t) = \sqrt{3} \cos(3t) + \sin(3t)$ .

Écrire  $f$  sous la forme :  $f(t) = A \cos(3t + \phi)$ , avec  $A$  et  $\phi$  à déterminer.

### **Correction**

On a :  $f(t) = \sqrt{3} \cos(3t) + 1 \sin(3t)$ .

On pose :  $a = \sqrt{3}$  et  $b = 1$

On a alors :  $A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$

$$\frac{f(t)}{A} = \frac{\sqrt{3} \cos(3t) + 1 \sin(3t)}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(3t) + \frac{1}{2} \sin(3t)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(3t) - \left(-\frac{1}{2}\right) \sin(3t)$$

Ceci dans l'idée de pouvoir appliquer la formule  $\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a + b)$

On cherche donc  $\phi$ , tel que :

$$\cos \phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \phi = -\frac{1}{2}$$

$$\phi = -\frac{\pi}{6} \text{ convient.}$$

Ainsi, d'après la première formule d'addition, on a :

$$\frac{f(t)}{A} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cos(3t) - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \sin(3t) = \cos\left(-\frac{\pi}{6} + 3t\right)$$

Soit encore :

$$\frac{f(t)}{2} = \cos\left(3t - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$f(t) = 2 \cos\left(3t - \frac{\pi}{6}\right).$$

**Méthode :** Calculer des valeurs de cos et sin à l'aide des formules d'addition

 **Vidéo** <https://youtu.be/WcTWAazcXds>

Calculer :  $\cos \frac{5\pi}{12}$  et  $\sin \frac{5\pi}{12}$

**Correction**

$$\begin{aligned} \cos \frac{5\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{5\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

2) Formules de duplication

**Propriété :** Soit  $a$  un nombre réel quelconque. On a :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin(2a) = 2 \cos a \sin a$$

**Démonstrations :**

Cas particulier des formules d'addition dans le cas où  $a = b$  :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\sin(2a) = 2 \cos a \sin a$$

On a également :  $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$  donc :

$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2 \cos^2 a - 1$$

Et :

$$\cos^2 a - \sin^2 a = (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a$$

Méthode : Calculer des valeurs de cos et sin à l'aide des formules de duplication

 Vidéo <https://youtu.be/RPtAUI3oLco>

Calculer  $\cos \frac{\pi}{8}$  et  $\sin \frac{\pi}{8}$

**Correction**

$$\cos \frac{\pi}{4} = \cos \left( 2 \times \frac{\pi}{8} \right) = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$$

Donc :

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

et donc :

$$\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}$$

car  $\cos \frac{\pi}{8}$  est positif.

$$\sin^2 \frac{\pi}{8} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{8} = 1 - \frac{2 + \sqrt{2}}{4} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

et donc :

$$\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

car  $\sin \frac{\pi}{8}$  est positif.

### 3) Formules de linéarisation

Propriété : Soit  $a$  un nombre réel quelconque. On a :

$$\cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2a)$$

$$\sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2a)$$

Exemples d'application : Calcul de primitives de  $x \mapsto \cos^2 x$  et  $x \mapsto \sin^2 a$  :

$f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$  a pour primitive :

$$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin(2x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin(2x)$$

$g(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$  a pour primitive :

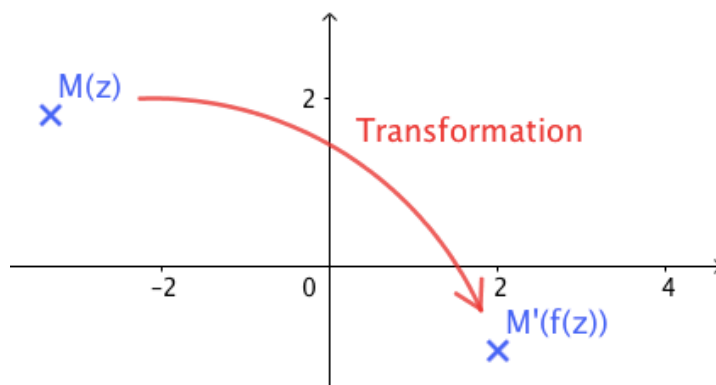
$$G(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin(2x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin(2x)$$

## Partie 2 : Expression complexe des transformations

Soit un point  $M$  d'affixe  $z$  associé à un point  $M'$  d'affixe  $z'$  par une transformation du plan rapporté à un repère orthonormé  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ .

Il existe alors une fonction  $f$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  telle que  $f(z) = z'$ .

La fonction  $f$  permet d'exprimer l'affixe  $z'$  de  $M'$  en fonction de l'affixe  $z$  de  $M$ .



Rappels sur les transformations vues en classe de 3<sup>e</sup> :

<https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/cours-maths/niveau-troisieme#15>

TRANSFORMATION	DÉFINITION	FONCTION ASSOCIÉE	FIGURE
<b>Translation</b> de vecteur $\vec{u}$ (d'affixe $b$ )	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$f(z) = z + b$	
<b>Homothétie</b> de centre $O$ et de rapport $a$ (non nul)	$\overrightarrow{OM'} = a \overrightarrow{OM}$	$f(z) = az$	
<b>Rotation</b> de centre $O$ et d'angle $\theta$	$OM' = OM$ $(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM}) = \theta$	$f(z) = e^{i\theta} z$	

## Méthode : Interpréter géométriquement les transformations

 Vidéo <https://youtu.be/RsOCKGgT9h4>

Soit les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ , données par les expressions suivantes :

$$f(z) = (1 - i)(1 + i)z ; g(z) = z - 2i ; h(z) = -e^{i\frac{\pi}{3}}z.$$

Reconnaître la nature des transformations qui sont associées à chaque fonction.

On précisera les éléments qui caractérisent ces transformations.

### Correction

$$\begin{aligned} - f(z) &= (1 - i)(1 + i)z \\ &= (1^2 - i^2)z \\ &= 2z \end{aligned}$$

Donc  $f$  est l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $2$ .

$$\begin{aligned} - g(z) &= z - 2i \\ &= z + (-2i) \end{aligned}$$

Donc  $g$  est la translation de vecteur  $\vec{u}$  d'affixe  $-2i$ .

$$\begin{aligned} - h(z) &= -e^{i\frac{\pi}{3}}z \\ &= (-1) \times e^{i\frac{\pi}{3}}z \\ &= e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{3}}z \\ &= e^{i\pi + i\frac{\pi}{3}}z \\ &= e^{i\frac{4\pi}{3}}z \end{aligned}$$

Donc  $h$  est la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{4\pi}{3}$ .



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)