

# ÉQUATIONS POLYNOMIALES

## Partie 1 : Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Définition : Soit  $a, b$  et  $c$  des réels avec  $a \neq 0$ .

On appelle **discriminant** du trinôme  $az^2 + bz + c$ , le nombre réel, noté  $\Delta$ , égal à  $b^2 - 4ac$ .

Propriété :

- Si  $\Delta > 0$  : L'équation  $az^2 + bz + c = 0$  a deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si  $\Delta = 0$  : L'équation  $az^2 + bz + c = 0$  a une unique solution réelle :  $z_0 = -\frac{b}{2a}$ .

- Si  $\Delta < 0$  : L'équation  $az^2 + bz + c = 0$  a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Démonstration :

On met le trinôme sous sa forme canonique (Voir cours de la classe de 1<sup>ère</sup>) :

$$az^2 + bz + c = a \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

En posant  $\Delta = b^2 - 4ac$  :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= 0 \\ \Leftrightarrow a \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 &= \frac{\Delta}{4a} \quad (a \neq 0) \\ \Leftrightarrow \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 &= \frac{\Delta}{4a^2} \end{aligned}$$

- Si  $\Delta > 0$  :

$$\begin{aligned} z + \frac{b}{2a} &= \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \quad \text{ou} \quad z + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \\ z &= \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} \quad \text{ou} \quad z = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} \end{aligned}$$

L'équation a deux solutions réelles :  $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ .

- Si  $\Delta = 0$  : L'équation peut s'écrire :

$$\left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0$$

L'équation n'a qu'une seule solution réelle :  $z_0 = -\frac{b}{2a}$ .

- Si  $\Delta < 0$  : L'équation peut s'écrire :

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = i^2 \frac{-\Delta}{4a^2} \quad (\text{car } i^2 = -1)$$

Donc :

$$z + \frac{b}{2a} = i \sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}} \quad \text{ou} \quad z + \frac{b}{2a} = -i \sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}} \quad (\text{car } \frac{-\Delta}{4a^2} > 0)$$

$$z = \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} \quad \text{ou} \quad z = -\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

L'équation a deux solutions complexes :  $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$  et  $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ .

**Méthode :** Résoudre une équation du second degré dans  $\mathbb{C}$

 **Vidéo** <https://youtu.be/KCnorHy5FE4>

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes : a)  $z^2 + 5 = 0$       b)  $z^2 + 3z + 4 = 0$

**Correction**

a)  $z^2 + 5 = 0$

$$z^2 = -5$$

$$z^2 = 5i^2$$

Donc :  $z = i\sqrt{5}$  ou  $z = -i\sqrt{5}$

Les solutions sont donc  $i\sqrt{5}$  et  $-i\sqrt{5}$ .

b)  $z^2 + 3z + 4 = 0$

On calcule de discriminant  $\Delta$  du trinôme :  $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 4 = -7$

$\Delta < 0$  donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-3+i\sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-3-i\sqrt{7}}{2}$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i \quad = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$$

**Propriété :** La somme  $S$  et le produit  $P$  des racines d'un polynôme du second degré de la forme  $az^2 + bz + c$  sont donnés par :  $S = -\frac{b}{a}$  et  $P = \frac{c}{a}$ .

**Exemple :**

On a vu dans la méthode précédente que l'équation  $z^2 + 5 = 0$  possède deux racines :  $i\sqrt{5}$  et  $-i\sqrt{5}$ .

Ainsi :  $S = i\sqrt{5} - i\sqrt{5} = 0$  et  $P = i\sqrt{5} \times (-i\sqrt{5}) = 5$

En appliquant, les formules de la propriété, on retrouve ces résultats :

$$S = -\frac{0}{1} = 0 \quad \text{et} \quad P = \frac{5}{1} = 5.$$

## Partie 2 : Équations de degré $n$ dans $\mathbb{C}$

### 1) Définition

**Définition :** Une **fonction polynôme** (ou **polynôme**)  $P$  est une fonction de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  de la forme  $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$ , où  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  sont les **coefficients** réels de  $P$ .

L'entier  $n$  est appelé le **degré** du polynôme  $P$ .

**Propriété :** Si une fonction polynôme est nulle, alors tous ses coefficients sont nuls.

### 2) Racine d'un polynôme

**Définition :** Soit un polynôme  $P$ . Un nombre complexe  $a$  s'appelle **racine** de  $P$  si  $P(a) = 0$ .

**Exemple :**

Les nombres complexes  $i$  et  $-i$  sont les racines du polynôme  $z^2 + 1$ .

**Théorème :** Soit un polynôme  $P$  définie par  $P(z) = z^n - a^n$  où  $n$  est un entier supérieur ou égal à 2.

Alors il existe un polynôme  $Q$  de degré  $n - 1$ , tel que  $P(z) = (z - a)Q(z)$

**Démonstration au programme :**

- Si  $a = 0$  : C'est évident.

- Si  $a = 1$  :

$$\begin{aligned} \text{On a : } z(z^{n-1} + z^{n-2} + z^{n-3} + \dots + z + 1) &= z^n + z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z^2 + z \\ 1(z^{n-1} + z^{n-2} + z^{n-3} + \dots + z + 1) &= z^{n-1} + z^{n-2} + z^{n-3} + \dots + z + 1 \end{aligned}$$

En soustrayant membre à membre, on a :

$$(z - 1)(z^{n-1} + z^{n-2} + z^{n-3} + \dots + z + 1) = z^n - 1$$

- Si  $a \neq 0$  quelconque :

On remplace  $z$  par  $z/a$  dans l'égalité ci-dessus :

$$\left(\frac{z}{a} - 1\right) \left(\frac{z^{n-1}}{a^{n-1}} + \frac{z^{n-2}}{a^{n-2}} + \frac{z^{n-3}}{a^{n-3}} + \dots + \frac{z}{a} + 1\right) = \frac{z^n}{a^n} - 1$$

Soit en multipliant chaque membre par  $a^n$  :

$$(z - a)(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2z^{n-3} + \dots + a^{n-2}z + a^{n-1}) = z^n - a^n$$

Il existe donc un polynôme  $Q(z) = z^{n-1} + az^{n-2} + a^2z^{n-3} + \dots + a^{n-2}z + a^{n-1}$  de degré  $n - 1$ , tel que  $P(z) = (z - a)Q(z)$ .

**Corollaire :** Soit un polynôme  $P$  de degré  $n$ . Si  $a$  est une racine complexe de  $P$ , alors il existe un polynôme  $Q$  de degré  $n - 1$ , tel que  $P(z) = (z - a)Q(z)$ .

**Démonstration au programme :**

Comme  $a$  est une racine complexe de  $P$ , on a :  $P(a) = 0$ .

Donc :

$$\begin{aligned} P(z) &= a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n - P(a) \\ &= a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n - a_0 - a_1a - a_2a^2 - \dots - a_na^n \\ &= a_1(z - a) + a_2(z^2 - a^2) + \dots + a_n(z^n - a^n) \end{aligned}$$

Yvan Monka - Académie de Strasbourg - [www.maths-et-tiques.fr](http://www.maths-et-tiques.fr)

Or, pour tout  $k$  compris entre 1 et  $n$ , il existe un polynôme  $Q_{k-1}$  de degré  $k - 1$ , tel que :  
 $z^k - a^k = (z - a)Q_{k-1}(z)$ .

$$\begin{aligned} \text{Donc : } P(z) &= a_1(z - a)Q_0(z) + a_2(z - a)Q_1(z) + \dots + a_n(z - a)Q_{n-1}(z) \\ &= (z - a)(a_1Q_0(z) + a_2Q_1(z) + \dots + a_nQ_{n-1}(z)) \end{aligned}$$

Il existe donc un polynôme  $Q$  de degré  $n - 1$ , tel que :  $P(z) = (z - a)Q(z)$ .

**Corollaire : Un polynôme de degré  $n$  admet au plus  $n$  racines.**

#### Démonstration au programme :

Supposons que les nombres complexes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  sont des racines deux à deux distincts du polynôme  $P$ .

Alors il existe un polynôme  $Q_1$  tel que :  $P(z) = (z - \alpha_1)Q_1(z)$ .

Or,  $0 = P(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)Q_1(\alpha_2)$  et  $\alpha_2 - \alpha_1 \neq 0$ .

Donc  $Q_1(\alpha_2) = 0$ .

Ainsi, il existe un polynôme  $Q_2$  tel que :  $Q_1(z) = (z - \alpha_2)Q_2(z)$ .

Et donc :  $P(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)Q_2(z)$ .

En continuant ainsi avec des polynômes  $Q_3, Q_4, \dots, Q_p$ , on obtient :

$$P(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3) \dots (z - \alpha_p)Q_p(z).$$

On en déduit que le polynôme  $P$  est de degré  $p + \text{degré}(Q_p) \geq p$ .

#### Méthode : Factoriser un polynôme dont une racine est connue

 Vidéo <https://youtu.be/1Y-JtI6nNXU>

Factoriser dans  $\mathbb{C}$  le polynôme :  $P(z) = z^3 + z^2 + 4z + 4$ .

#### **Correction**

$P$  est un polynôme de degré 3, il admet au plus 3 racines.

On cherche une racine évidente de  $P$  en testant des valeurs entières « autour de 0 ». On peut tester également  $i$  ou  $-i$ .

Il sera ensuite aisé de déterminer la ou les autres racines qui sont au plus au nombre de 2.

On constate que  $z = -1$  est une racine évidente de  $P$  :

$$P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + 4(-1) + 4 = 0$$

Donc, il existe un polynôme  $Q$  de degré 2, tel que :  $P(z) = (z + 1)Q(z)$ .

On a donc :

$$z^3 + z^2 + 4z + 4 = (z + 1)Q(z)$$

$$z^3 + z^2 + 4z + 4 = (z + 1)(az^2 + bz + c)$$

$$z^3 + z^2 + 4z + 4 = az^3 + bz^2 + cz + az^2 + bz + c$$

$$z^3 + z^2 + 4z + 4 = az^3 + (b + a)z^2 + (c + b)z + c$$

Ainsi, en procédant par identification, on a :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + a = 1 \\ c + b = 4 \\ c = 4 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases}$$

On en déduit que :  $Q(z) = z^2 + 4$ .

Or, il est possible de factoriser  $Q$  :

$$Q(z) = z^2 + 4 = (z - 2i)(z + 2i)$$

En effet :  $z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z = 2i \text{ ou } z = -2i$

On a ainsi :  $P(z) = (z + 1)(z - 2i)(z + 2i)$ .

**Méthode :** Résoudre une équation de degré 3 à coefficients réels dont une racine est connue.

 Vidéo <https://youtu.be/KqghKmQ9gOk>

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$ .

### Correction

On pose  $P(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$ .

On voit que  $x = 1$  est une racine évidente de  $P$ . Donc il existe un polynôme  $Q$ , de degré 2, tel que :  $P(x) = (x - 1)Q(x)$ .

On a donc :

$$x^3 + x^2 - 3x + 1 = (x - 1)Q(x)$$

$$x^3 + x^2 - 3x + 1 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

$$x^3 + x^2 - 3x + 1 = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$$

$$x^3 + x^2 - 3x + 1 = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$$

Ainsi, en procédant par identification, on a :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 1 \\ c - b = -3 \\ -c = 1 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

Donc :  $P(x) = (x - 1)(x^2 + 2x - 1)$ .

L'équation  $x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$  peut s'écrire  $(x - 1)(x^2 + 2x - 1) = 0$ .

Soit :  $x - 1 = 0$  ou  $x^2 + 2x - 1 = 0$

$$x = 1 \quad \Delta = 8$$

$$x = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2}$$

$$\text{ou } x = -1 + \sqrt{2}$$

$$S = \{-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}; 1\}$$



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)