

ÉQUATIONS POLYNOMIALES

I. Équations du second degré dans \mathbb{C}

Définition : Soit a, b et c des réels avec $a \neq 0$.

On appelle **discriminant** du trinôme $az^2 + bz + c$, le nombre réel, noté Δ , égal à $b^2 - 4ac$.

Propriété :

- Si $\Delta > 0$: L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$: L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a une unique solution réelle : $z_0 = -\frac{b}{2a}$.

- Si $\Delta < 0$: L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Démonstration :

On met le trinôme sous sa forme canonique (Voir cours de la classe de 1^{ère}) :

$$az^2 + bz + c = a \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

En posant $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= 0 \\ \Leftrightarrow a \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 &= \frac{\Delta}{4a} \quad (a \neq 0) \\ \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 &= \frac{\Delta}{4a^2} \end{aligned}$$

- Si $\Delta > 0$:

$$\begin{aligned} z + \frac{b}{2a} &= \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \quad \text{ou} \quad z + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \\ z &= \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} \quad \text{ou} \quad z = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} \end{aligned}$$

L'équation a deux solutions réelles : $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

- Si $\Delta = 0$: L'équation peut s'écrire :

$$\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0$$

L'équation n'a qu'une seule solution réelle : $z_0 = -\frac{b}{2a}$.

- Si $\Delta < 0$: L'équation peut s'écrire :

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = i^2 \frac{-\Delta}{4a^2} \quad (\text{car } i^2 = -1)$$

Donc :

$$z + \frac{b}{2a} = i \sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}} \quad \text{ou} \quad z + \frac{b}{2a} = -i \sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}} \quad (\text{car } \frac{-\Delta}{4a^2} > 0)$$

$$z = \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} \quad \text{ou} \quad z = -\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

L'équation a deux solutions complexes : $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Méthode : Résoudre une équation du second degré dans \mathbb{C}

▶ Vidéo <https://youtu.be/KCnorHy5FE4>

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes : a) $z^2 + 5 = 0$ b) $z^2 + 3z + 4 = 0$

a) $z^2 + 5 = 0$

$$z^2 = -5$$

$$z^2 = 5i^2$$

Donc : $z = i\sqrt{5}$ ou $z = -i\sqrt{5}$

Les solutions sont donc $i\sqrt{5}$ et $-i\sqrt{5}$.

b) $z^2 + 3z + 4 = 0$

On calcule de discriminant Δ du trinôme : $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 4 = -7$

$\Delta < 0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-3+i\sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-3-i\sqrt{7}}{2}$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i \quad = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$$

Propriété : La somme S et le produit P des racines d'un polynôme du second degré de la forme $az^2 + bz + c$ sont donnés par : $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$.

Exemple :

On a vu dans la méthode précédente que l'équation $z^2 + 5 = 0$ possède deux racines : $i\sqrt{5}$ et $-i\sqrt{5}$.

Ainsi : $S = i\sqrt{5} - i\sqrt{5} = 0$ et $P = i\sqrt{5} \times (-i\sqrt{5}) = 5$

En appliquant, les formules de la propriété, on retrouve ces résultats :

$$S = -\frac{0}{1} = 0 \quad \text{et} \quad P = \frac{5}{1} = 5.$$

II. Équations de degré n dans \mathbb{C}

1) Définition

Définition : Une **fonction polynôme** (ou **polynôme**) P est une fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} de la forme $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$, où $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sont les **coefficients** réels de P .
L'entier n est appelé le **degré** du polynôme P .

Propriété : Si une fonction polynôme est nulle, alors tous ses coefficients sont nuls.

2) Racine d'un polynôme

Définition : Soit un polynôme P . Un nombre complexe a s'appelle **racine** de P si $P(a) = 0$.

Exemple :

Les nombres complexes i et $-i$ sont les racines du polynôme $z^2 - 1$.

Théorème : Soit un polynôme P définie par $P(z) = z^n - a^n$ où n est un entier supérieur ou égal à 2.
Alors il existe un polynôme Q de degré $n - 1$, tel que $P(z) = (z - a)Q(z)$

Démonstration au programme :

- Si $a = 0$: C'est évident.

- Si $a = 1$:

$$\begin{aligned} \text{On a : } z(z^{n-1} + z^{n-2} + z^{n-3} + \dots + z + 1) &= z^n + z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z^2 + z \\ 1(z^{n-1} + z^{n-2} + z^{n-3} + \dots + z + 1) &= z^{n-1} + z^{n-2} + z^{n-3} + \dots + z + 1 \end{aligned}$$

En soustrayant membre à membre, on a :

$$(z - 1)(z^{n-1} + z^{n-2} + z^{n-3} + \dots + z + 1) = z^n - 1$$

- Si $a \neq 0$ quelconque :

On remplace z par z/a dans l'égalité ci-dessus :

$$\left(\frac{z}{a} - 1\right) \left(\frac{z^{n-1}}{a^{n-1}} + \frac{z^{n-2}}{a^{n-2}} + \frac{z^{n-3}}{a^{n-3}} + \dots + \frac{z}{a} + 1\right) = \frac{z^n}{a^n} - 1$$

Soit en multipliant chaque membre par a^n :

$$(z - a)(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2z^{n-3} + \dots + a^{n-2}z + a^{n-1}) = z^n - a^n$$

Il existe donc un polynôme $Q(z) = z^{n-1} + az^{n-2} + a^2z^{n-3} + \dots + a^{n-2}z + a^{n-1}$ de degré $n - 1$, tel que $P(z) = (z - a)Q(z)$.

Corollaire : Soit un polynôme P de degré n . Si a est une racine complexe de P , alors il existe un polynôme Q de degré $n - 1$, tel que $P(z) = (z - a)Q(z)$.

Démonstration au programme :

Comme a est une racine complexe de P , on a : $P(a) = 0$.

Donc :

$$\begin{aligned} P(z) &= a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n - P(a) \\ &= a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n - a_0 - a_1a - a_2a^2 - \dots - a_na^n \end{aligned}$$

$$= a_1(z - a) + a_2(z^2 - a^2) + \dots + a_n(z^n - a^n)$$

Or, pour tout k compris entre 1 et n , il existe un polynôme Q_{k-1} de degré $k - 1$, tel que : $z^k - a^k = (z - a)Q_{k-1}(z)$.

$$\begin{aligned} \text{Donc : } P(z) &= a_1(z - a)Q_0(z) + a_2(z - a)Q_1(z) + \dots + a_n(z - a)Q_{n-1}(z) \\ &= (z - a)(a_1Q_0(z) + a_2Q_1(z) + \dots + a_nQ_{n-1}(z)) \end{aligned}$$

Il existe donc un polynôme Q de degré $n - 1$, tel que : $P(z) = (z - a)Q(z)$.

Méthode : Résoudre une équation de degré 3 à coefficients réels dont une racine est connue.

 **Vidéo** <https://youtu.be/KqghKmQ9gOk>

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$.

On pose $P(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$.

On voit que $x = 1$ est une racine évidente de P . Donc il existe un polynôme Q , de degré 2, tel que : $P(x) = (x - 1)Q(x)$.

On a donc :

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 - 3x + 1 &= (x - 1)Q(x) \\ x^3 + x^2 - 3x + 1 &= (x - 1)(ax^2 + bx + c) \\ x^3 + x^2 - 3x + 1 &= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c \\ x^3 + x^2 - 3x + 1 &= ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c \end{aligned}$$

Ainsi, en procédant par identification, on a :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 1 \\ c - b = -3 \\ -c = 1 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

Donc : $P(x) = (x - 1)(x^2 + 2x - 1)$.

L'équation $x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$ peut s'écrire $(x - 1)(x^2 + 2x - 1) = 0$.

Soit : $x - 1 = 0$ ou $x^2 + 2x - 1 = 0$

$$x = 1 \quad \Delta = 8$$

$$x = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2}$$

$$\text{ou } x = -1 + \sqrt{2}$$

$$S = \{-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}; 1\}$$

Corollaire : Un polynôme de degré n admet au plus n racines.

Démonstration au programme :

Supposons que les nombres complexes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ sont des racines deux à deux distincts du polynôme P .

Alors il existe un polynôme Q_1 tel que : $P(z) = (z - \alpha_1)Q_1(z)$.

Or, $0 = P(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)Q_1(\alpha_2)$ et $\alpha_2 - \alpha_1 \neq 0$.

Donc $Q_1(\alpha_2) = 0$.

Ainsi, il existe un polynôme Q_2 tel que : $Q_1(z) = (z - \alpha_2)Q_2(z)$.

Et donc : $P(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)Q_2(z)$.

En continuant ainsi avec des polynômes Q_3, Q_4, \dots, Q_p , on obtient :

$$P(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3) \dots (z - \alpha_p)Q_p(z).$$

On en déduit que le polynôme P est de degré $p + \text{degré}(Q_p) \geq p$.

Méthode : Factoriser un polynôme dont une racine est connue

 Vidéo <https://youtu.be/1Y-Jtl6nNXU>

Factoriser dans \mathbb{C} le polynôme : $P(z) = z^3 + z^2 + 4z + 4$.

P est un polynôme de degré 3, il admet au plus 3 racines.

On cherche une racine évidente de P en testant des valeurs entières « autour de 0 ».

Il sera ensuite aisé de déterminer la ou les autres racines qui sont au plus au nombre de 2.

On constate que $z = -1$ est une racine évidente de P :

$$P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + 4(-1) + 4 = 0$$

Donc, il existe un polynôme Q de degré 2, tel que : $P(z) = (z + 1)Q(z)$.

On a donc :

$$z^3 + z^2 + 4z + 4 = (z + 1)Q(z)$$

$$z^3 + z^2 + 4z + 4 = (z + 1)(az^2 + bz + c)$$

$$z^3 + z^2 + 4z + 4 = az^3 + bz^2 + cz + az^2 + bz + c$$

$$z^3 + z^2 + 4z + 4 = az^3 + (b + a)z^2 + (c + b)z + c$$

Ainsi, en procédant par identification, on a :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + a = 1 \\ c + b = 4 \\ c = 4 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases}$$

On en déduit que : $Q(z) = z^2 + 4$.

Or, il est possible de factoriser Q :

$$Q(z) = z^2 + 4 = (z - 2i)(z + 2i)$$

En effet : $z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z = 2i \text{ ou } z = -2i$

On a ainsi : $P(z) = (z + 1)(z - 2i)(z + 2i)$.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales