PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I. Primitive d'une fonction continue

1) Définition d'une équation différentielle

Définition : Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Exemples :
a) L'équation $f'(x) = 5$ peut se noter $y' = 5$ en considérant que y est une fonction inconnue qui dépend de x.
Dans ce cas, une solution de cette équation est $y = 5x$. En effet, $(5x)' = 5$.

b) Une solution de l'équation $y' = 2x$ est $y = x^2$.
Pour une équation différentielle, la solution n'est habituellement pas unique.
Par exemple, $y = x^2 + 1$ est une autre solution de l'équation différentielle.
En effet, $(x^2 + 1)' = 2x$.

2) Équation différentielle du type $y' = f$

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction g est une **solution** de l'équation différentielle $y' = f$ sur I si et seulement si, g est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, on a : $g'(x) = f(x)$.

Méthode : Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

Vidéo https://youtu.be/LX8PxR-ScfM

Prouver que la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = 3x^2 + \ln x$ est solution de l'équation différentielle $y' = 6x + \frac{1}{x}$.

Pour tout x de sur $]0\,;+\infty[$, on a :
$g'(x) = 3 \times 2x + \frac{1}{x} = 6x + \frac{1}{x}$
Donc, g est bien solution de l'équation $y' = 6x + \frac{1}{x}$.

3) Primitive d'une fonction

Exemple :
On considère les fonctions suivantes :
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto 2x + 3$ $\quad$ $x \longmapsto x^2 + 3x - 1$
On constate que $F'(x) = 2x + 3 = f(x)$.
F est donc solution de l'équation différentielle $y' = f$.
On dit dans ce cas que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Définition : f est une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle **primitive** de f sur I, une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Remarque :
Dans ces conditions, on a l'équivalence :
« F a pour dérivée f » et « f a pour primitive F ».

Exemple :
$F(x) = \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $f(x) = x$ car $F'(x) = f(x)$ pour tout réel x.

4) Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Une primitive	Intervalle
$f(x) = a,\ \ a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ pour $n \geq 0$ $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$ pour $n < -1$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0\,;\,+\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$

5) Linéarité des primitives

Propriété : f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur I alors :
- $F + G$ est une primitive de $f + g$,
- kF est une primitive de kf avec k réel.

Démonstrations :
- $(F+G)' = F' + G' = f + g$
- $(kF)' = kF' = kf$

6) Opérations et fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	Une primitive	Conditions
$u'u^n$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	Si $n < 0, u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u(x) > 0$
$u'e^u$	e^u	
$u' \cos u$	$\sin u$	
$u' \sin u$	$-\cos u$	

Méthode : Recherche de primitives

Vidéo https://youtu.be/GA6jMgLd_Cw
Vidéo https://youtu.be/82HYI4xuClw
Vidéo https://youtu.be/gxRpmHWnoGQ
Vidéo https://youtu.be/iiq6eUQee9g

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I.

a) $f(x) = x^3 - 2x$ sur $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^3}$ sur $I =]0\,;\,+\infty[$

c) $f(x) = (2x-5)(x^2-5x+4)^2$ sur $I = \mathbb{R}$

d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $I = \mathbb{R}$

e) $f(x) = x^2e^{x^3}$ sur $I = \mathbb{R}$

f) $f(x) = \cos(5x) - 3\sin(3x-1)$ sur $I = \mathbb{R}$

a) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$

b) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^3} = 3x^2 - 3x^{-3}$ donc $F(x) = x^3 - 3 \times \frac{1}{-2}x^{-2} = x^3 + \frac{3}{2x^2}$

c) $f(x) = (2x-5)(x^2-5x+4)^2$ du type $u'u^n$
avec $u(x) = x^2 - 5x + 4 \rightarrow u'(x) = 2x - 5$
Une primitive de $u'u^n$ est de la forme $\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
Soit : $F(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 5x + 4)^3$

d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ du type $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = x^2 + 1 \rightarrow u'(x) = 2x$
Une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est de la forme $2\sqrt{u}$
Soit : $F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2+1}$

e) $f(x) = x^2 e^{x^3} = \frac{1}{3} 3x^2 e^{x^3}$ du type $u'e^u$ avec $u(x) = x^3 \rightarrow u'(x) = 3x^2$
Une primitive de $u'e^u$ est de la forme e^u.
Soit : $F(x) = \frac{1}{3} e^{x^3}$

f) $f(x) = \cos(5x) - 3\sin(3x-1) = \frac{1}{5} \times 5\cos(5x) - 3\sin(3x-1)$
Donc $F(x) = \frac{1}{5}\sin(5x) + \cos(3x-1)$

Propriété : Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Démonstration au programme :
Soit F et G deux primitives de la fonction f sur I.
Alors : $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = f(x)$.
Donc : $F'(x) = G'(x)$, soit $F'(x) - G'(x) = 0$, soit encore $(F - G)'(x) = 0$.
La fonction $F - G$ possède une dérivée nulle sur I, elle est donc constante sur I.
On nomme C cette constante. Ainsi : $F(x) - G(x) = C$ pour tout x de I.
On en déduit que les deux primitives de f diffèrent d'une constante.

Propriété : f est une fonction continue sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f sur I alors pour tout réel C, la fonction $x \longmapsto F(x) + C$ est une primitive de f sur I.

Démonstration :
F est une primitive de f.
On pose $G(x) = F(x) + C$.
$G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$.
Donc G est une primitive de f.

Exemple :
$F(x) = \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $f(x) = x$.
Donc, toute fonction de la forme $G_C(x) = \frac{x^2}{2} + C$, avec $C \in \mathbb{R}$, est une primitive de f.

Propriété : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

- Démontrée dans le chapitre Intégration -

Remarque : Bien que l'existence étant assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue. Par exemple, la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitive sous forme explicite.

Méthode : Recherche d'une primitive particulière

Vidéo https://youtu.be/-q9M7oJ9gkI

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$.

1) Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F(x) = \frac{e^{2x}}{x}$ est une primitive de f.

2) Déterminer la primitive de la fonction f qui s'annule en $x = 1$.

1) La fonction F est une primitive de f, si $F' = f$.

$F'(x) = \frac{2e^{2x}x - e^{2x}}{x^2} = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2} = f(x)$.

2) Toutes les primitives de f sont de la forme : $G(x) = F(x) + C$ où C est un nombre réel.

On cherche la primitive de la fonction f qui s'annule en $x = 1$, soit : $G(1) = 0$

Donc : $F(1) + C = 0$

Soit : $\frac{e^{2\times 1}}{1} + C = 0$

$C = -e^2$

La primitive de la fonction f qui s'annule en $x = 1$ est G telle que :

$G(x) = F(x) - e^2 = \frac{e^{2x}}{x} - e^2$

II. Équations différentielles

1) Équations différentielles du type $y' = ay$

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, sont les fonctions de la forme $x \longmapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

Démonstration au programme :

• Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax}$, où C est un réel.
Alors, $f'(x) = C \times ae^{ax} = a \times Ce^{ax} = af(x)$.
Donc $f'(x) = af(x)$.
f est donc solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

• Réciproquement, soit f une solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
Et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-ax} \times f(x)$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $g'(x) = e^{-ax} \times f'(x) - ae^{-ax} \times f(x)$.
Comme f est solution de l'équation différentielle $y' = ay$, on a : $f'(x) = af(x)$.
Ainsi : $g'(x) = e^{-ax} \times af(x) - ae^{-ax} \times f(x) = 0$.
La fonction g est donc égale à une constante réelle C, soit :
$e^{-ax} \times f(x) = C$.
Et donc : $f(x) = \frac{C}{e^{-ax}} = Ce^{ax}$.

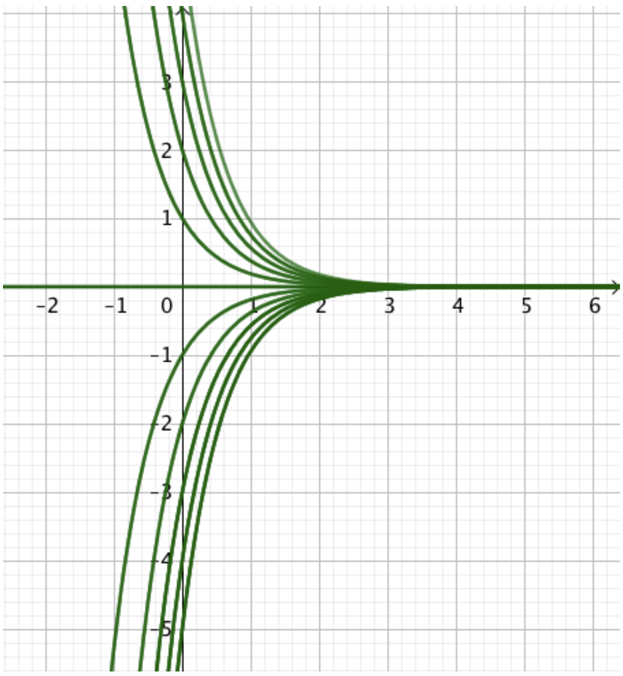
Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay$

Vidéo https://youtu.be/YJNHTq85tJA

On considère l'équation différentielle $3y' + 5y = 0$.
1) a) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation.
b) Représenter à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, quelques courbes des fonctions solutions.
2) Déterminer l'unique solution telle que $y(1) = 2$.

1) a) $3y' + 5y = 0$
$3y' = -5y$
$y' = -\frac{5}{3}y$
Les solutions sont de la forme : $y_C(x) = Ce^{-\frac{5}{3}x}$, $C \in \mathbb{R}$.

b) Pour différentes valeurs de C, on obtient :



2) $y(1) = 2$
Donc : $Ce^{-\frac{5}{3}\times 1} = 2$
$Ce^{-\frac{5}{3}} = 2$
$C = 2e^{\frac{5}{3}}$
Et donc : $y(x) = 2e^{\frac{5}{3}}\, e^{-\frac{5}{3}x} = 2e^{\frac{5}{3}-\frac{5}{3}x} = 2e^{\frac{5}{3}(1-x)}$

Propriété : Si f et g sont deux solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, alors $f + g$ et kf, $k \in \mathbb{R}$, sont également solutions de l'équation différentielle.

Démonstrations :
- $(f + g)' = f' + g' = af + ag = a(f + g)$
- $(kf)' = kf' = k \times af = a(kf)$

2) Équations différentielles du type $y' = ay + b$

Propriété : La fonction $x \longmapsto -\frac{b}{a}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ $(a \neq 0)$. Cette solution est appelée **solution particulière constante**.

Démonstration :

On pose : $g(x) = -\frac{b}{a}$. Alors $g'(x) = 0$.

Or : $ag(x) + b = a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0 = g'(x)$.

Donc : $g'(x) = ag(x) + b$.

g est donc solution de l'équation $y' = ay + b$.

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (a et b deux réels, a non nul) sont les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto u(x) + v(x)$$

où u est la solution particulière constante de l'équation $y' = ay + b$

et v est une solution quelconque de l'équation $y' = ay$.

Remarque : L'équation $y' = ay + b$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Corollaire : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $x \longmapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$

Vidéo https://youtu.be/F_LQLZ8rUhg

Vidéo https://youtu.be/CFZr44vny3w

On considère l'équation différentielle $2y' - y = 3$.

1) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation.

2) Déterminer l'unique solution telle que $y(0) = -1$.

1) $2y' - y = 3$

$2y' = y + 3$

$y' = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$

Les solutions sont de la forme : $y_C(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} - \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}$, $C \in \mathbb{R}$.

Soit : $y_C(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} - 3$, $C \in \mathbb{R}$

2) $y(0) = -1$

Donc : $Ce^{\frac{1}{2}\times 0} - 3 = -1$

$C - 3 = -1$

$C = 2$

Et donc : $y(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 3$

3) Équations différentielles du type $y' = ay + f$

Propriété : Soit a un réel non nul et f une fonction définie sur un intervalle I.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f$ sont les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto u(x) + v(x)$$

où u est une solution particulière de l'équation $y' = ay + f$
et v est une solution quelconque de l'équation $y' = ay$.

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + f$

Vidéo https://youtu.be/QeGvVncvyLc

On considère l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$.
1) Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est solution particulière de l'équation différentielle.
2) En déduire la forme générale de toutes les solutions de l'équation différentielle.

1) $u'(x) = -\frac{1}{2} \times 2x - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2}$
Donc : $u'(x) - 2u(x) = -x - \frac{1}{2} - 2 \times \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)$

$$= -x - \frac{1}{2} + x^2 + x + \frac{1}{2}$$

$$= x^2$$

La fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est donc une solution particulière de l'équation $y' - 2y = x^2$.

2) Les solutions de l'équation : $y' = 2y$ sont de la forme $x \longmapsto Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$.
On en déduit que les solutions de l'équations $y' - 2y = x^2$ sont de la forme :
$y_C(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$, **somme** d'une solution particulière de l'équation $y' - 2y = x^2$ et de la forme générale des solutions de l'équation $y' = 2y$.