

# LES SUITES – Chapitre 2/2

▶ Tout le cours en vidéo : [https://youtu.be/MJv7\\_pkFcdA](https://youtu.be/MJv7_pkFcdA)

## Partie 1 : Limites et comparaison

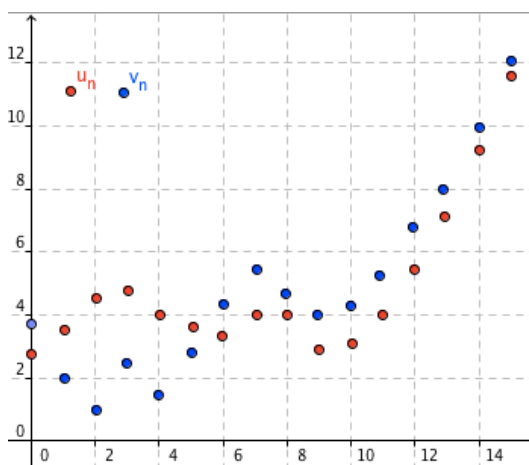
### 1) Théorèmes de comparaison

#### Théorème 1 :

Soit deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

Si, à partir d'un certain rang, on a  $\begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \end{cases}$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

Par abus de langage, on pourrait dire que la suite  $(u_n)$  pousse la suite  $(v_n)$  vers  $+\infty$  à partir d'un certain rang.



#### Démonstration au programme :

▶ Vidéo <https://youtu.be/qIBlhdfYFI>

Soit un nombre réel  $a$ .

-  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , donc l'intervalle  $]a ; +\infty[$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note  $n_1$ .

On a donc pour tout  $n \geq n_1$ ,  $a < u_n$ .

- À partir d'un certain rang, que l'on note  $n_2$ , on a  $u_n \leq v_n$ .

- Ainsi pour tout  $n \geq \max(n_1 ; n_2)$ , on a :  $a < u_n \leq v_n$ .

On en déduit que l'intervalle  $]a ; +\infty[$  contient tous les termes de la suite  $(v_n)$  à partir du rang  $\max(n_1 ; n_2)$ .

Et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

#### Théorème 2 :

Soit deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

Si, à partir d'un certain rang, on a :  $\begin{cases} u_n \geq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \end{cases}$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ .

Méthode : Déterminer une limite par comparaison

▶ Vidéo <https://youtu.be/iQhh46LupN4>

Déterminer la limite suivante :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + (-1)^n$

### Correction

On a :

$$(-1)^n \geq -1 \text{ donc :}$$

$$n^2 + (-1)^n \geq n^2 - 1$$

Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 1 = +\infty$ , donc par comparaison,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + (-1)^n = +\infty$ .

### 2) Théorème d'encadrement

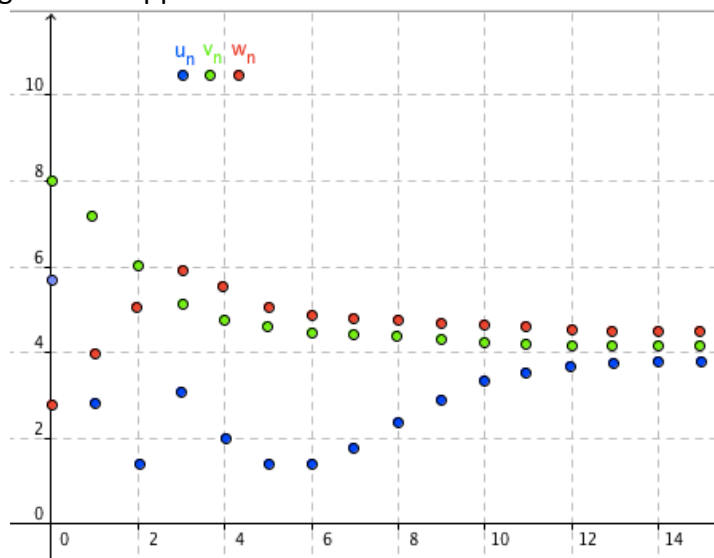
Théorème des gendarmes :

Soit trois suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$ .

Si, à partir d'un certain rang, on a : 
$$\begin{cases} u_n \leq v_n \leq w_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L \end{cases} \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L.$$

Par abus de langage, on pourrait dire que les suites  $(u_n)$  et  $(w_n)$  (les gendarmes) se resserrent autour de la suite  $(v_n)$  à partir d'un certain rang pour la faire converger vers la même limite.

Ce théorème est également appelé le **théorème du sandwich**.



Démonstration :

Soit un intervalle ouvert  $I$  contenant  $L$ .

-  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ , donc l'intervalle  $I$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note  $n_1$ .

-  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$ , donc l'intervalle  $I$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note  $n_2$ .

- A partir d'un certain rang, que l'on note  $n_3$ , on a  $u_n \leq v_n \leq w_n$ .  
 - Ainsi pour tout  $n \geq \max(n_1; n_2; n_3)$ , l'intervalle  $I$  contient tous les termes de la suite  $(v_n)$ .  
 Et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L$ .

Méthode : Déterminer une limite par encadrement

 Vidéo [https://youtu.be/OdzYjz\\_vQbw](https://youtu.be/OdzYjz_vQbw)

Déterminer la limite suivante :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sin n}{n}$

**Correction**

On a :  $-1 \leq \sin n \leq 1$ , donc :

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Or :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  donc d'après le théorème des gendarmes :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

Et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sin n}{n} = 1$ .

Remarque : On utilise le théorème de comparaison pour démontrer une limite infinie et le théorème d'encadrement pour une limite finie.

## Partie 2 : Suites majorées, minorées, bornées

1) Définitions :

Définitions :

- La suite  $(u_n)$  est **majorée** s'il existe un réel  $M$  tel que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n \leq M$ .
- La suite  $(u_n)$  est **minorée** s'il existe un réel  $m$  tel que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n \geq m$ .
- La suite  $(u_n)$  est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples :

- Les suites de terme général  $\cos n$  ou  $(-1)^n$  sont bornées car minorées par  $-1$  et majorées par  $1$ .
- La suite de terme général  $n^2$  est minorée par  $0$ . Mais elle n'est pas majorée.

Méthode : Démontrer qu'une suite est majorée ou minorée

 Vidéo [https://youtu.be/F1u\\_BVwiW8E](https://youtu.be/F1u_BVwiW8E)

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$  et  $u_0 = 2$ .  
 Démontrer par récurrence que la suite  $(u_n)$  est majorée par  $3$ .

**Correction**• **Initialisation :**

$$u_0 = 2 < 3$$

La propriété est donc vraie pour  $n = 0$ .

• **Hérédité :**

- Hypothèse de récurrence :

Supposons qu'il existe un entier  $k$  tel que la propriété soit vraie :  $u_k < 3$ .

- Démontrons que : La propriété est vraie au rang  $k + 1$  :  $u_{k+1} < 3$ .

$$\text{On a : } u_k < 3$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{3} u_k < \frac{1}{3} \times 3$$

$$\frac{1}{3} u_k + 2 < \frac{1}{3} \times 3 + 2$$

$$\text{Soit : } u_{k+1} < 3$$

• **Conclusion :**

La propriété est vraie pour  $n = 0$  et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel  $n$ , soit :  $u_n < 3$ . Donc  $(u_n)$  est majorée.

2) Convergence des suites monotones

**Propriété :** Si une suite est croissante et admet pour limite  $L$ , alors elle est majorée par  $L$ .

Démonstration par l'absurde :

Démontrons par l'absurde en supposant le contraire, soit : « Il existe un rang  $p$ , tel que  $u_p > L$ . »

- L'intervalle ouvert  $]L - 1 ; u_p[$  contient  $L$ .

Or, par hypothèse,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ . Donc l'intervalle  $]L - 1 ; u_p[$  contient tous les termes de la suite  $(u_n)$  à partir d'un certain rang (1).

- Comme  $(u_n)$  est croissante :  $u_n \geq u_p$  pour  $n > p$ .

Donc si  $n > p$ , alors  $u_n \notin ]L - 1 ; u_p[$  (2).

(1) et (2) sont contradictoires, on en déduit qu'il n'existe pas  $p \in \mathbb{N}$ , tel que  $u_p > L$ .

Et donc la suite  $(u_n)$  est majorée par  $L$ .

Théorème de convergence monotone :

- Si une suite est croissante et majorée alors elle est convergente.

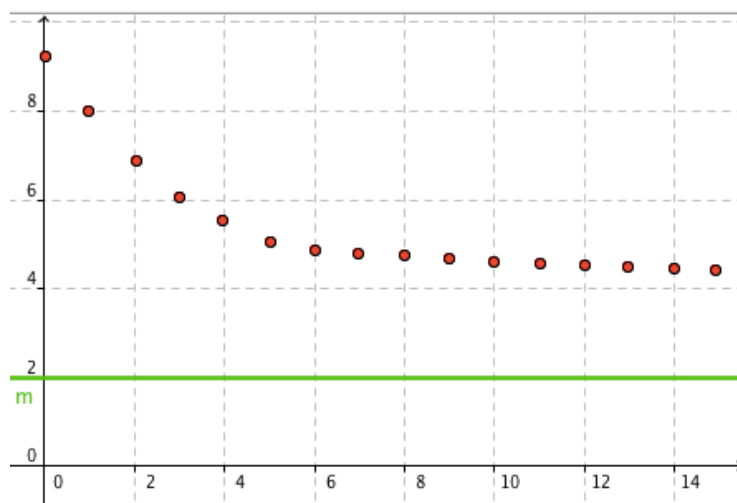
- Si une suite est décroissante et minorée alors elle est convergente.

- Admis -

Remarque :

Ce théorème permet de s'assurer de la convergence mais ne donne pas la limite.

Dans l'exemple ci-dessous, la suite est décroissante et minorée par 2. Cela prouve que la limite de la suite est supérieure à 2 mais n'est pas nécessairement égale à 2. Elle peut être égale à 4 !



**Méthode :** Utiliser le théorème de convergence monotone

▶ Vidéo <https://youtu.be/gO-MQUIBAfo>

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$  et  $u_0 = 2$ .  
Démontrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.

### Correction

On a démontré dans le chapitre « LES SUITES – Chapitre 1/2 Partie 1 » que la suite  $(u_n)$  est croissante.

On a démontré dans la méthode précédente que la suite  $(u_n)$  est majorée par 3.

La suite  $(u_n)$  est donc croissante et majorée, d'après le théorème de convergence monotone, on en déduit que la suite  $(u_n)$  est convergente.

### Corollaire :

- 1) Si une suite est croissante et non majorée alors elle tend vers  $+\infty$ .
- 2) Si une suite est décroissante et non minorée alors elle tend vers  $-\infty$ .

### Démonstration (du 1) au programme :

▶ Vidéo <https://youtu.be/rttQIYOKCRQ>

Soit un réel  $a$ .

Comme  $(u_n)$  n'est pas majorée, il existe un entier  $p$  tel que  $u_p > a$ .

La suite  $(u_n)$  est croissante donc pour tout  $n > p$ , on a :  $u_n \geq u_p$ .

Donc pour tout  $n > p$ , on a :  $u_n > a$ .

Et donc à partir d'un certain rang  $p$ , tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle  $]a ; +\infty[$ .

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

## Partie 3 : Comportement à l'infini d'une suite géométrique

### 1) Rappel

**Propriété :** Soit  $(u_n)$  une **suite géométrique** de raison  $q$  et de premier terme  $u_0$ .

Alors, pour tout entier  $n$ , on a :

- $u_{n+1} = q \times u_n$  (forme de récurrence)
- $u_n = u_0 \times q^n$  (forme explicite).

**Exemple :** Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $-3$  et de premier terme  $5$ .

On a :  $u_{n+1} = -3u_n$  et  $u_n = 5 \times (-3)^n$ .

### 2) Limites

$q$	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$	Pas de limite	0	1	$+\infty$

Démonstration au programme dans le cas  $q > 1$  :

 Vidéo [https://youtu.be/aSBGk\\_GEEew](https://youtu.be/aSBGk_GEEew)

**Prérequis :** Pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $(1 + a)^n \geq 1 + na$  (inégalité de Bernoulli), démontrée dans le chapitre « LES SUITES (Partie 1) Paragraphe I. ».

On suppose que  $q > 1$ , alors on peut poser  $q = a + 1$  avec  $a > 0$ .

$q^n = (1 + a)^n \geq 1 + na$ , d'après l'inégalité de Bernoulli.

Or  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + na = +\infty$  car  $a > 0$ .

Donc d'après le théorème de comparaison :  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$ .

**Exemple :** La suite de terme général  $-5 \times 4^n$  a pour limite  $-\infty$  car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n = +\infty$ .

**Méthode :** Étudier un phénomène modélisable par une suite

 Vidéo <https://youtu.be/6-vFnQ6TghM>

 Vidéo [https://youtu.be/0CNT\\_fUuwEY](https://youtu.be/0CNT_fUuwEY)

Un investisseur dépose 5000 € sur un compte rémunéré à 3 % par an. Chaque année suivante, il dépose 300 € de plus sur ce compte.

On note  $(u_n)$  la somme épargnée à l'année  $n$ .

On a alors :  $u_{n+1} = 1,03u_n + 300$  et  $u_0 = 5000$ .

1) Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .

2) Prouver que la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier  $n$  par  $v_n = u_n + 10000$  est géométrique et donner sa raison et son premier terme.

3) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

4) En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$ . Puis calculer  $u_{10}$ .

5) Étudier les variations de  $(u_n)$ .

**Correction**

$$1) u_1 = 1,03u_0 + 300 = 5450$$

$$u_2 = 1,03u_1 + 300 = 5913,5$$

$$2) v_{n+1} = u_{n+1} + 10000$$

$$= 1,03u_n + 300 + 10000$$

$$= 1,03u_n + 10300$$

$$= 1,03(v_n - 10000) + 10300, \text{ car } v_n = u_n + 10000$$

$$= 1,03v_n - 10300 + 10300$$

$$= 1,03v_n$$

Donc  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme

$$v_0 = u_0 + 10000 = 5000 + 10000 = 15000.$$

$$3) \text{ Pour tout } n, \text{ on a : } v_n = 15000 \times 1,03^n.$$

$$4) u_n = v_n - 10000 = 15000 \times 1,03^n - 10000$$

$$\text{On a alors : } u_{10} = 15000 \times 1,03^{10} - 10000 \approx 10158,75$$

$$5) u_{n+1} - u_n = 15000 \times 1,03^{n+1} - 10000 - (15000 \times 1,03^n - 10000)$$

$$= 15000 \times (1,03^{n+1} - 1,03^n)$$

$$= 15000 \times 1,03^n \times (1,03 - 1)$$

$$= 450 \times 1,03^n > 0$$

Donc la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.

### 3) Somme des termes d'une suite géométrique

**Propriété :**  $n$  est un entier naturel non nul et  $q$  un réel différent de 1 alors on a :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

**Méthode :** Utiliser la limite d'une suite géométrique

 **Vidéo** <https://youtu.be/XTftGHfnYMw>

Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-2)^n}{3}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n - 3^n$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

**Correction**

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-2)^n}{3} = ?$$

$((-2)^n)$  est une suite géométrique de raison  $-2$  strictement inférieure à  $-1$ .

Donc  $((-2)^n)$  ne possède pas de limite.

Et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-2)^n}{3}$  n'existe pas.

b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n - 3^n = ?$

•  $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty \end{cases}$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type " $\infty - \infty$ ".

• Levons l'indétermination :

$$2^n - 3^n = 3^n \left( \frac{2^n}{3^n} - 1 \right) = 3^n \left( \left( \frac{2}{3} \right)^n - 1 \right)$$

• Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{3} \right)^n = 0$ , comme limite d'une suite géométrique de raison  $\frac{2}{3}$  avec  $-1 < \frac{2}{3} < 1$ .

Donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{3} \right)^n - 1 = -1$ .

•  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ , comme limite d'une suite géométrique de raison  $3 > 1$ .

Donc, comme limite d'un produit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \left( \left( \frac{2}{3} \right)^n - 1 \right) = -\infty$

Soit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n - 3^n = -\infty$ .

c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \right)^3 + \dots + \left( \frac{1}{2} \right)^n$

On reconnaît la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme 1. Donc :

$$1 + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \right)^3 + \dots + \left( \frac{1}{2} \right)^n = \frac{1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1} \right)$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1} = 0$ , comme limite d'une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  avec  $-1 < \frac{1}{2} < 1$ .

Donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1} = 1$ .

Et donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n+1} \right) = 2$ .

Soit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \right)^3 + \dots + \left( \frac{1}{2} \right)^n = 2$ .

© Copyright

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)

Yvan Monka - Académie de Strasbourg - [www.maths-et-tiques.fr](http://www.maths-et-tiques.fr)