SUITES GÉOMÉTRIQUES

Rappel : Reconnaître une suite arithmétique et une suite géométrique
Vidéo https://youtu.be/pHq6oClOylU

Partie 1 : Relation de récurrence (rappel)

Exemples :

a) Considérons la suite (u_n) où l'on passe d'un terme au suivant en multipliant par 2.
Si le premier terme est égal à 5, les termes suivants sont :
$u_0 = 5$,
$u_1 = 10$,
$u_2 = 20$,
$u_3 = 40$.

Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.
La suite est donc définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

b) Soit la suite numérique (v_n) de premier terme 4 et de raison 0,1.
Les premiers termes successifs sont :
$v_0 = 4$
$v_1 = 0{,}1 \times 4 = 0{,}4$
$v_2 = 0{,}1 \times 0{,}4 = 0{,}04$
$v_3 = 0{,}1 \times 0{,}04 = 0{,}004$
La suite est donc définie par : $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = 0{,}1 \times v_n \end{cases}$

Définition : Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q, tel que :
$u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

Partie 2 : Forme explicite en fonction de n

Méthode : Exprimer une suite géométrique en fonction de *n*

Vidéo https://youtu.be/WTmdtbQpa0c

On place un capital de 500 € sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4 % par an.
On note u_n la valeur du capital après n années.

a) Calculer u_2 et u_3.

b) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? On donnera son premier terme et sa raison.

c) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
d) Exprimer u_n en fonction de n.

Correction
a) Chaque année, le capital est multiplié par 1,04.
$u_0 = 500$
$u_1 = 1{,}04 \times 500 = 520$
$u_2 = 1{,}04 \times 520 = 540{,}80$
$u_3 = 1{,}04 \times 540{,}80 = 562{,}432$

b) (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 500$ et de raison $q = 1{,}04$.
On parle ici de **croissance exponentielle**.

c) $u_{n+1} = 1{,}04\, u_n$

d) Après 1 an, le capital est égal à : $u_1 = 1{,}04 \times 500$
Après 2 ans, le capital est égal à : $u_2 = 1{,}04^2 \times 500$
Après 3 ans, le capital est égal à : $u_3 = 1{,}04^3 \times 500$
De manière générale, après n années, le capital est : $u_n = 1{,}04^n \times 500$

Propriété : Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, on a :
$u_n = u_0\, q^n$

Méthode : Déterminer une expression en fonction de n d'une suite géométrique

Vidéo https://youtu.be/WTmdtbQpa0c

a) Déterminer l'expression en fonction de n de la suite géométrique définie par :
$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 4u_n \end{cases}$
b) Déterminer l'expression en fonction de n de la suite géométrique définie par :
$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

Correction

a) On a : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 4u_n$
On passe d'un terme au suivant en multipliant par 4, donc la raison q est égal à 4 et le premier terme u_0 est égal à 3.
Ainsi :
$u_n = u_0 \times q^n$
$u_n = 3 \times 4^n$

b) On a : $u_1 = 5$ et $u_{n+1} = 2u_n$
On passe d'un terme au suivant en multipliant par 2 donc la raison q est égal à 2.
Ici, le terme u_0 n'est pas donné mais on peut le calculer.
Pour passer de u_1 à u_0, on divise par 2 (« marche arrière ») donc :

$u_0 = \frac{u_1}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$.
La raison q est égal à 2 et le premier terme u_0 est égal à 2,5.
Ainsi :
$u_n = u_0 \times q^n$
$u_n = 2{,}5 \times 2^n$

⚠ À noter : Il peut être pratique d'appliquer directement la formule : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

Partie 3 : Sens de variation d'une suite géométrique (rappel)

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 strictement positif.
- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Méthode : Déterminer le sens de variation d'une suite géométrique

Déterminer le sens de variation des suites géométriques (u_n) et (v_n) définies par :

a) $u_n = 4 \times 2^n$ b) $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2} u_n \end{cases}$

Correction

a) La suite géométrique (u_n) définie par $u_n = 4 \times 2^n$ est croissante car $q = 2$ donc $q > 1$
b) La suite géométrique (v_n) définie par $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$ et $v_0 = 2$ est décroissante car $q = \frac{1}{2}$ donc $0 < q < 1$.

Partie 4 : Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété : Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$Somme = 1er\ terme\ de\ la\ somme \times \frac{1 - raison^{nombre\ de\ termes}}{1 - raison}$$

Méthode : Calculer la somme des termes d'une suite géométrique

▶ **Vidéo** https://youtu.be/_BjEOTi-2z8
▶ **Vidéo** https://youtu.be/44YbOfRQgjk

1) On considère la suite géométrique (u_n) de raison q = 2 et de premier terme u_1 = 5.
   a) Exprimer u_n en fonction de n.

b) Calculer la somme :

$$Somme = \sum_{k=5}^{20} u_k$$

2) Chaque début d'année, on place un capital de 500 € sur un même compte à un taux annuel de 3 %. Calculer la valeur totale disponible sur le compte après 7 ans.

Correction

1) $a)\ u_n = 5 \times 2^{n-1}$

$$b)\ S = \sum_{k=5}^{20} u_k = u_5 + u_6 + \cdots + u_{20}$$

Ainsi :

$$Somme = u_5 \times \frac{1-q^{16}}{1-q} = 5 \times 2^4 \times \frac{1-2^{16}}{1-2} = -5 \times 2^4 \times (1-2^{16}) = 5\ 242\ 800$$

On vérifie avec la calculatrice :

Sur TI : **som(suite(5*2^X-1,X,5,20))**

Sur Casio : $\sum_{X=5}^{20}(5\times 2^{X-1})$

La calculatrice affiche 5 242 800. Donc :

$$S = \sum_{k=5}^{20} u_k = 5\ 242\ 800$$

2) On considère la suite (v_n) exprimant la valeur acquise pour 500 € placés durant n années.
(v_n) est une suite géométrique de raison 1,03 (correspondant à une augmentation de 3 % par an) et de premier terme $v_0 = 500$.

On veut calculer la valeur totale acquise après 7 ans et 7 versements échelonnés chaque année :

Le 1er versement reste placé pendant 7 ans, il rapporte : $v_7 = 500 \times 1{,}03^7$
Le 2e versement reste placé pendant 6 ans, il rapporte : $v_6 = 500 \times 1{,}03^6$
Le 3e versement reste placé pendant 5 ans, il rapporte : $v_5 = 500 \times 1{,}03^5$
Le 4e versement reste placé pendant 4 ans, il rapporte : $v_4 = 500 \times 1{,}03^4$
Le 5e versement reste placé pendant 3 ans, il rapporte : $v_3 = 500 \times 1{,}03^3$
Le 6e versement reste placé pendant 2 ans, il rapporte : $v_2 = 500 \times 1{,}03^2$
Le 7e versement reste placé pendant 1 an, il rapporte : $v_1 = 500 \times 1{,}03^1$

La valeur totale acquise après 7 ans est la somme :

$$S = \sum_{k=1}^{7} v_k$$

Soit :
$S = 500 \times 1{,}03^1 + 500 \times 1{,}03^2 + \cdots + 500 \times 1{,}03^7$

$= 500 \times (1{,}03^1 + 1{,}03^2 + \cdots + 1{,}03^7)$
$\approx 500 \times 7{,}892$
≈ 3946
La valeur acquise après 7 ans est environ égale à 3946 €.

Partie 5 : Moyenne géométrique de deux nombres

- La moyenne géométrique de deux nombres a et b positifs est un nombre c tel que :

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$$

- On constate ainsi que pour une suite géométrique chaque terme est la moyenne géométrique du terme qui le précède et du terme qui le suit.
Pour une suite géométrique de terme u_n, on a en effet :

$$\frac{u_{n-1}}{u_n} = \frac{u_n}{u_{n+1}}$$

- Comme $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$, on a :

$\frac{ab}{c} = c$
$ab = c^2$
$c^2 = ab$
$c = \sqrt{ab}$

La **moyenne géométrique** de deux nombres a et b positifs est égale à $\sqrt{ab}$.

Méthode : Calculer une moyenne géométrique de deux nombres

Vidéo https://youtu.be/w_Vj2URV1Qo

a) Calculer la moyenne géométrique de 4 et 9.
b) On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ telle que la moyenne géométrique de u_0 et u_2 soit égale à 10.
Quelle est la raison de la suite (u_n) ?

Correction
a) La moyenne géométrique de 4 et 9 est égale à $\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36} = 6$

b) Pour une suite géométrique, chaque terme est la moyenne géométrique du terme qui le précède et du terme qui le suit.
Donc en particulier ici, u_1 est la moyenne géométrique de u_0 et u_2. Donc $u_1 = 10$.
Or, $u_1 = q \times u_0$
Soit : $10 = q \times 2$
Donc : $q = 5$
La suite (u_n) a pour raison 5.

Partie 6 : Comparaison de suites

Méthode : Comparer deux suites

Une banque propose deux options de placement :
- Placement A : On dépose un capital de départ. Chaque année, la banque nous reverse 6 % du capital de départ.
- Placement B : On dépose un capital de départ. Chaque année, la banque nous reverse 4 % du capital de l'année précédente.

On suppose que le placement initial est de 200 €. L'objectif est de savoir à partir de combien d'années un placement est plus intéressant que l'autre.
On note u_n la valeur du capital après n années pour le placement A et v_n la valeur du capital après n années pour le placement B.

1) a) Calculer u_1, u_2 et u_3.
   b) Calculer v_1, v_2 et v_3.
2) Quelle est la nature des suites (u_n) et (v_n) ? On donnera le premier terme et la raison.
3) Exprimer u_n et v_n en fonction de n.
4) Déterminer le plus petit entier n, tel que $u_n < v_n$. Interpréter ce résultat.

Correction

1) a) Avec le placement A, on gagne chaque année 6 % de 200 € = 12 €.

$u_0 = 200$
$u_1 = 200 + 12 = 212$
$u_2 = 212 + 12 = 224$
$u_3 = 224 + 12 = 236$

b) Avec le placement B, chaque année le capital est multiplié par 1,04.

$v_0 = 200$
$v_1 = 1{,}04 \times 200 = 208$
$v_2 = 1{,}04 \times 208 = 216{,}32$
$v_3 = 1{,}04 \times 216{,}32 = 224{,}97$

2) (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 200$ et de raison $r = 12$.
(v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 200$ et de raison $q = 1{,}04$.

3) $u_n = 200 + 12n$
$v_n = 200 \times 1{,}04^n$

4) Saisir l'expression du terme général, comme pour une fonction :

Y1=200+12X
Y2=200*1.04^X

Paramétrer la Table avec un pas de 1 et afficher la table :

X	Y1	Y2
14	368	346.34
15	380	360.19
16	392	374.6
17	404	389.58
18	416	405.16
19	428	421.37
20	440	438.22
21	452	455.75
22	464	473.98
23	476	492.94
24	488	512.66

X=21

Le plus petit entier n, tel que $u_n < v_n$ est 21.
Cela signifie qu'à partir de 21 années, le placement B devient plus rentable que le placement A.

Décibels : Téléphones VS Avion
Vidéo https://youtu.be/mvXGq5S0eAM

RÉSUMÉ	(u_n) une suite géométrique de raison q positive de premier terme u_0 positif.	Exemple : $q = 2$ et $u_0 = 4$
Définition	$u_{n+1} = q \times u_n$	$u_{n+1} = 2 \times u_n$ Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 2.
Propriété	$u_n = u_0 \times q^n$	$u_n = 4 \times 2^n$
Somme des termes consécutifs	$Somme = 1er\ terme\ de\ la\ somme \times \dfrac{1 - raison^{nombre\ de\ termes}}{1 - raison}$	$u_4 + \cdots u_{12} = u_4 \times \dfrac{1 - 2^9}{1 - 2}$
Sens de variation	Si $q > 1$: (u_n) est croissante. Si $0 < q < 1$: (u_n) est décroissante.	$q = 2 > 1$ La suite (u_n) est croissante.
Représentation graphique	On parle de croissance exponentielle.