VARIABLES ALÉATOIRES

(Partie 1)

Tout le cours sur la loi binomiale en vidéo : https://youtu.be/xMmfPUoBTtM

I. Répétition d'expériences indépendantes

Exemples :

1) On lance un dé plusieurs fois de suite et on note à chaque fois le résultat. On répète ainsi la même expérience (lancer un dé) et les expériences sont indépendantes l'une de l'autre (un lancer n'influence pas le résultat d'un autre lancer).

2) Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne.
On répète cette expérience 10 fois de suite. Ces expériences sont identiques et indépendantes.

Définition : Plusieurs expériences sont **identiques et indépendantes** si :
- elles ont les mêmes issues,
- les probabilités de chacune des issues ne changent pas d'une expérience à l'autre.

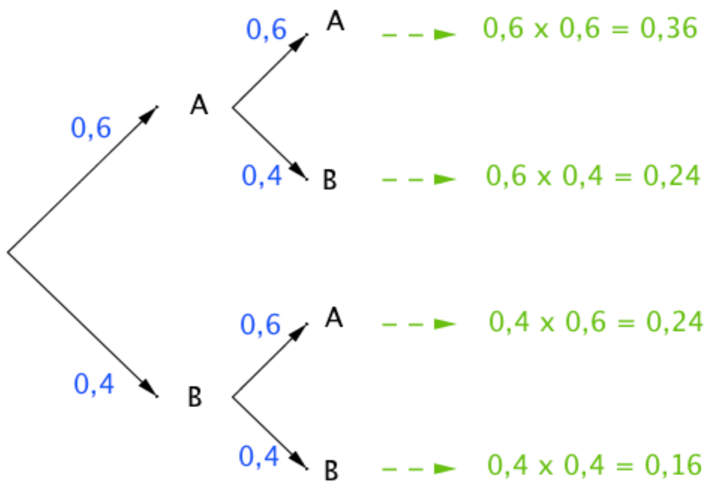
Propriété : On considère une expérience aléatoire à deux issues A et B avec les probabilités P(A) et P(B).
Si on répète l'expérience deux fois de suite de façon indépendante :
- la probabilité d'obtenir l'issue A suivie de l'issue B est égale à P(A) x P(B),
- la probabilité d'obtenir l'issue B suivie de l'issue A est égale à P(B) x P(A),
- la probabilité d'obtenir deux fois l'issue A est égale à $P(A)^2$,
- la probabilité d'obtenir deux fois l'issue B est égale à $P(B)^2$.

Méthode : Représenter la répétition d'expériences identiques et indépendantes dans un arbre

Vidéo https://youtu.be/e7jH8a1cDtg

On considère l'expérience suivante :
Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète l'expérience deux fois de suite.
1) Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.
2) Déterminer la probabilité :
   a) d'obtenir deux boules blanches
   b) une boule blanche et une boule rouge
   c) au moins une boule blanche.

1) On note A l'issue "On tire une boule blanche" et B l'issue "On tire une boule rouge".
P(A) = $\frac{3}{5}$ = 0,6 et P(B) = $\frac{2}{5}$ = 0,4.
On résume les issues de l'expérience dans un arbre de probabilité :



2) a) Obtenir deux boules blanches correspond à l'issue (A ; A) :
P_1 = 0,6 x 0,6 = 0,36 (d'après l'arbre).

b) Obtenir une boule blanche et une boule rouge correspond aux issues (A ; B) et (B ; A) :
P_2 = 0,24 + 0,24 = 0,48.

b) Obtenir au moins une boule blanche correspond aux issues (A ; B), (B ; A) et (A ; A) :
P_3 = 0,24 + 0,24 + 0,36 = 0,84.

- Pour une expérience dont le nombre d'issues est supérieur à 2, le principe reste le même.
- Pour une expérience dont le nombre de répétitions est supérieur à 2, le principe reste le même.

Propriété : Lorsqu'on répète n fois de façon indépendante une expérience aléatoire dont les issues $A_1, A_2, \dots, A_n$ ont pour probabilité $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$, alors la probabilité d'obtenir la suite d'issues $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est égale aux produits de leurs probabilités $P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_n)$.

Exemple :
On lance un dé à six faces 4 fois de suite.
On considère les issues suivantes :
A : On obtient un nombre pair.
B : On obtient un 1.
C : On obtient un 3 ou un 5.
La probabilité d'obtenir la suite d'issues (A ; B ; A ; C) est :
$$P(A\,;B\,;A\,;C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{72}$$

II. Épreuve de Bernoulli

Définition : Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues que l'on peut nommer "succès" ou "échec".

Exemples :

1) Le jeu du pile ou face : On considère par exemple comme succès "obtenir pile" et comme échec "obtenir face".
2) On lance un dé et on considère par exemple comme succès "obtenir un six" et comme échec "ne pas obtenir un six".

Définition : Une **loi de Bernoulli** est une loi de probabilité qui suit le schéma suivant :
- la probabilité d'obtenir un succès est égale à p,
- la probabilité d'obtenir un échec est égale à $1 - p$.
p est appelé le paramètre de la loi de Bernoulli.

Exemples : Dans les exemples présentés plus haut :

$$1)\ p = \frac{1}{2} \qquad 2)\ p = \frac{1}{6}$$

Convention :
Au succès, on peut associer le nombre 1 et à l'échec, on peut associer le nombre 0.
Soit la variable aléatoire X qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p.
Dans ce cas, la loi de probabilité de X peut être présentée dans le tableau :

x_i	1	0
$P(X = x_i)$	p	$1 - p$

Propriété : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p, alors : $E(X) = p \qquad V(X) = p(1-p)$

Démonstrations :
- $E(X) = 1 \times P(X = 1) + 0 \times P(X = 0)$
$= 1 \times p + 0 \times (1 - p)$
$= p$
- $V(X) = (1 - E(X))^2 \times P(X = 1) + (0 - E(X))^2 \times P(X = 0)$
$= (1 - p)^2 \times p + (0 - p)^2 \times (1 - p)$
$= p - 2p^2 + p^3 + p^2 - p^3$
$= p - p^2$
$= p(1 - p)$

III. Schéma de Bernoulli, loi binomiale

1) Schéma de Bernoulli

Définition : Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes pour lesquelles la probabilité du succès est p.

Remarque : Pour la répétition de n épreuves de Bernoulli, l'univers est $\{0, 1\}^n$.

Exemple : La répétition de 10 lancers d'une pièce de monnaie est un schéma de Bernoulli de paramètres n = 10 et $p = \frac{1}{2}$.

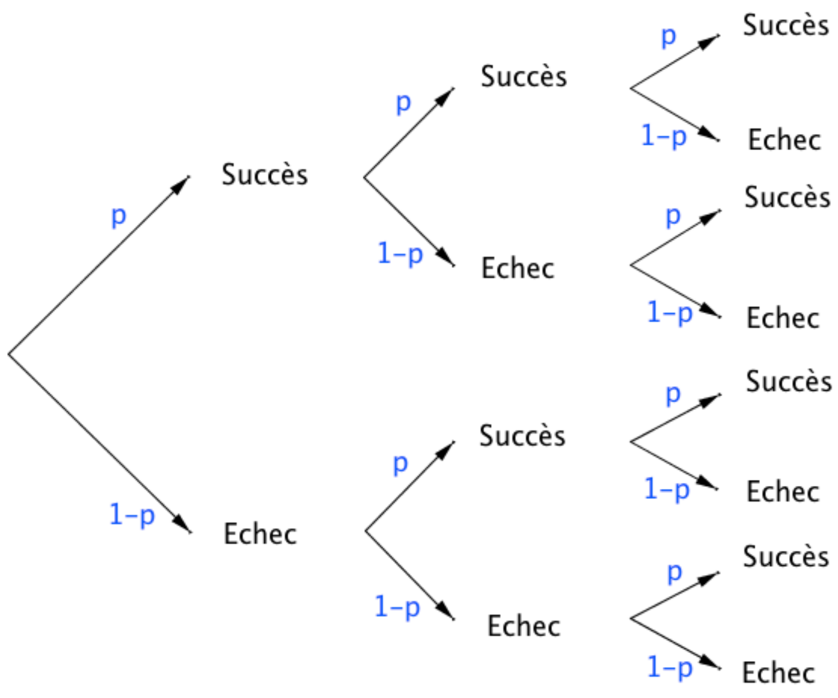
2) Loi binomiale

Définition : On réalise un schéma de Bernoulli composé de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
Une **loi binomiale** est une loi de probabilité définie sur l'ensemble {0 ; 1 ; 2 ; … ; n} qui donne le nombre de succès de l'expérience.

Remarque : n et p sont les paramètres de la loi binomiale et on note $B(n\,;p)$.

Exemple :
Vidéo https://youtu.be/b18_r8r4K2s

On a représenté dans un arbre de probabilité les issues d'une expérience suivant un schéma de Bernoulli composé de 3 épreuves de Bernoulli de paramètre p.
X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès.



On a par exemple :

- P(X = 3) = p^3.
En effet, en suivant les branches sur le haut de l'arbre, on arrive à 3 succès avec une probabilité égale à p x p x p.

- X = 2 correspond aux suites d'issues suivantes :
(Succès ; Succès ; Échec)

(Succès ; Échec ; Succès)
(Échec ; Succès ; Succès)
Donc P(X = 2) = 3 p^2 (1 – p)

3) Expression de la loi binomiale à l'aide des coefficients binomiaux

Exemple :
Dans l'arbre précédent, combien existe-t-il de chemins conduisant à 2 succès parmi 3 épreuves ? On dit aussi : Combien y existe-t-il de combinaisons de 2 parmi 3 ?
(Succès ; Succès ; Echec)
(Succès ; Echec ; Succès)
(Echec ; Succès ; Succès)
Il existe donc trois combinaisons de 2 parmi 3 et on note : $\binom{3}{2} = 3$.

Définition : On réalise une expérience suivant un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
Soit un entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$
On appelle **coefficient binomial** ou **combinaison de k parmi n**, le nombre de chemins conduisant à k succès parmi n épreuves sur l'arbre représentant l'expérience.
Ce nombre se note : $\binom{n}{k}$.

Propriété : On réalise une expérience suivant un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
On associe à l'expérience la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $B(n\,;p)$.
Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$, la loi de probabilité de X est :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Démonstration au programme :
Un chemin comportant k succès (de probabilité p) comporte $n-k$ échecs (de probabilité $1-p$). Ainsi sa probabilité est égale à $p^k(1-p)^{n-k}$.
Le nombre de chemins menant à k succès est égal à $\binom{n}{k}$.
Donc : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Méthode : Calculer les probabilités d'une loi binomiale

Vidéo https://youtu.be/1gMq2TJwSh0

Une urne contient 5 boules gagnantes et 7 boules perdantes. Une expérience consiste à tirer au hasard 4 fois de suite une boule et de la remettre.
On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre de tirages gagnants.
1) Prouver que X suit une loi binomiale.
2) Déterminer la loi de probabilité de X.
3) Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules gagnantes.

1) On répète 4 fois une expérience à deux issues : boules gagnantes (5 issues) ; boules perdantes (7 issues).
Le **succès** est d'obtenir une boule gagnante.

La **probabilité du succès** sur un tirage est égale à $\frac{5}{12}$.

Les paramètres de la loi binomiale sont donc : $n = 4$ et $p = \frac{5}{12}$.

2) $P(X = k) = \binom{4}{k}\left(\frac{5}{12}\right)^k\left(1 - \frac{5}{12}\right)^{4-k}$
$= \binom{4}{k}\left(\frac{5}{12}\right)^k\left(\frac{7}{12}\right)^{4-k}$

3) $P(X = 3) = \binom{4}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^3\left(\frac{7}{12}\right)^{4-3}$
$= \binom{4}{3}\left(\frac{5}{12}\right)^3 \times \frac{7}{12}$
$= \binom{4}{3} \times \frac{125}{1728} \times \frac{7}{12}$
$= \binom{4}{3} \times \frac{875}{20736}$

On détermine la valeur de la combinaison $\binom{4}{3}$ à l'aide du triangle de Pascal.

n \ k	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	**4**	1

On a donc $\binom{4}{3} = \mathbf{4}$, et donc :
$P(X = 3) = 4 \times \frac{875}{20736} = \frac{875}{5184} \approx 0{,}17.$

La loi binomiale avec la calculatrice :
Vidéos dans la liste :
https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/cours-maths/niveau-terminale#14

Méthode : Chercher un intervalle I pour lequel la probabilité $P(X \in I)$ est inférieure à ou supérieure à une valeur donnée

On fait l'hypothèse que 55% des électeurs ont voté pour le candidat A. On interroge au hasard à la sortie des urnes 50 personnes.

Soit X est la variable aléatoire qui compte le nombre k de personnes qui ont voté pour le candidat A.
1) Déterminer des réels a et b tels que : $P(a \leq X \leq b) \geq 0{,}95$
2) Donner une interprétation du résultat précédent.

1) La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre n = 50 et p = 0,55.

Avec le tableur, il est possible d'obtenir la loi de probabilité de X.

Avec la loi binomiale *B*(50 ; 0,55) :
Pour calculer P(X = 20), il faut saisir : =LOI.BINOMIALE(20;50;0,55;0)
Pour calculer P(X ≤ 20), il faut saisir : =LOI.BINOMIALE(20;50;0,55;1)

C2 =LOI.BINOMIALE(A2;50;0,55;1)

	A	B	C	D	E
1	k	P(X=k)	P(X<=k)		
2	0	4,6E-018	4,6E-018		
3	1	2,8E-016	2,8E-016		
4	2	8,4E-015	8,7E-015		
5	3	1,6E-013	1,7E-013		
6	4	2,4E-012	2,5E-012		
	…	…	…		

On obtient ainsi :

k	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
P(X=k)	0,001	0,003	0,006	0,012	0,021	0,034	0,05	0,069	0,087	0,102	0,112

k	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
P(X=k)	0,112	0,104	0,089	0,07	0,051	,034	0,021	0,012	0,006	0,003	0,001

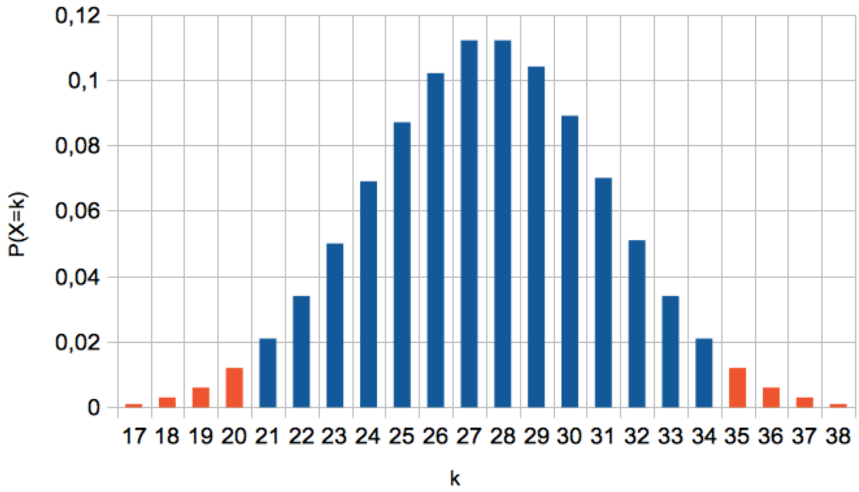
Pour $k < 17$ et $k > 38$, les probabilités sont inférieures à 10^{-3} et peuvent être considérées comme négligeables.

On obtient également le tableau des probabilités cumulées :

k	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
P(X≤k)	0,002	0,005	0,01	0,023	0,044	0,077	0,127	0,196	0,283	0,386	0,498

K	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
P(X≤k)	0,61	0,713	0,802	0,872	0,923	0,957	0,978	0,989	0,995	0,998	0,999

On cherche a et b tel que : $P(a \leq X \leq b) \geq 0{,}95$.
On commence par déterminer a le plus petit possible, tel que : $P(X \leq a) > 0{,}025$.
On lit : $a = 21$.
On détermine ensuite b, le plus petit possible, tel que : $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.
On lit : $b = 34$.



Ainsi : $P(21 \leq X \leq 34) \geq 0{,}95$

2) Or, $\frac{21}{50}$ = 42 % et $\frac{34}{50}$ = 68 %.
Pour un échantillon de 50 personnes, il y a au moins 95% de chance qu'il y ait entre 42 % et 68 % des électeurs qui votent pour le candidat A.

A noter : L'intervalle [0,42 ; 0,68] s'appelle *intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.*