VARIABLES ALÉATOIRES (Partie 1)

Tout le cours sur la loi binomiale en vidéo : https://youtu.be/xMmfPUoBTtM

I. Espérance d'une variable aléatoire

Méthode : Calculer l'espérance d'une variable aléatoire

Vidéo https://youtu.be/AcWVxHgtWp4

Soit l'expérience aléatoire : "On tire une carte dans un jeu de 32 cartes."
On considère le jeu suivant :
- Si on tire un cœur, on gagne 2 €.
- Si on tire un roi, on gagne 5 €.
- Si on tire une autre carte, on perd 1 €.

On appelle X la variable aléatoire qui à une carte tirée associe un gain ou une perte.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

1) La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 2, 5, –1 mais aussi 7.
En effet, si on tire le roi de cœur, on gagne 5(roi) + 2(cœur) = 7 €.

- Si la carte tirée est un cœur (autre que le roi de cœur), X = 2.
P(X = 2) = $\frac{7}{32}$.
- Si la carte tirée est un roi (autre que le roi de cœur), X = 5.
P(X = 5) = $\frac{3}{32}$.
- Si la carte tirée est le roi de cœur, X = 7.
P(X = 7) = $\frac{1}{32}$.
- Si la carte tirée n'est ni un cœur, ni un roi, X = –1.
P(X = –1) = $\frac{21}{32}$.

La loi de probabilité de X est :

x_i	–1	2	5	7
$P(X = x_i)$	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

2)

Définition : L'**espérance mathématique** de X est :

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \cdots + x_n \times P(X = x_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i)$$

$$E(X) = (-1) \times \frac{21}{32} + 2 \times \frac{7}{32} + 5 \times \frac{3}{32} + 7 \times \frac{1}{32} = \frac{15}{32}$$

L'espérance est la moyenne que l'on peut espérer si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois.

L'espérance est égale à $\frac{15}{32} \approx 0{,}50$ signifie qu'en jouant un grand nombre de fois, on peut espérer gagner en moyenne environ 0,50 €.

II. Schéma de Bernoulli, loi binomiale

1) Épreuve de Bernoulli

Exemples :
1) Le jeu du pile ou face : On considère comme succès "obtenir pile" et comme échec "obtenir face". La probabilité d'un succès est égale à $p = \frac{1}{2}$.
2) On lance un dé et on considère comme succès "obtenir un six" et comme échec "ne pas obtenir un six". La probabilité d'un succès est égale à $p = \frac{1}{6}$.

Définition : Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues que l'on peut nommer "succès" ou "échec".

2) Schéma de Bernoulli

Exemple : La répétition de 10 lancers d'une pièce de monnaie est un schéma de Bernoulli de paramètres n = 10 et $p = \frac{1}{2}$.

Définition : Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes pour lesquelles la probabilité du succès est p.

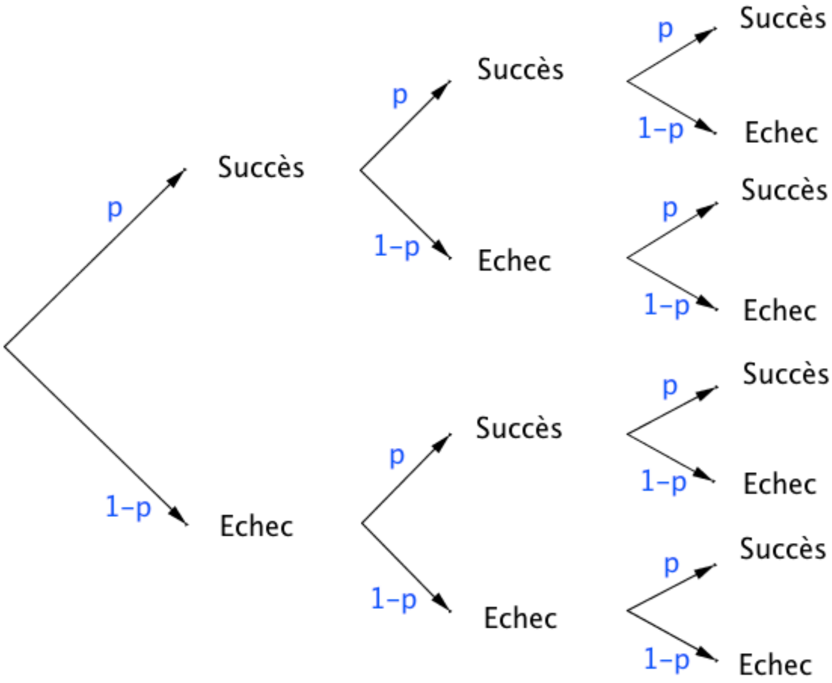
3) Loi binomiale

Si dans un schéma de Bernoulli, on répète la même expérience n fois, alors il est possible d'obtenir 0 succès, 1 succès, 2 succès, … ou n succès.

Définition : On réalise un schéma de Bernoulli composé de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
Une **loi binomiale** est une loi de probabilité qui donne le nombre de succès de l'expérience.

Remarque : n et p sont les paramètres de la loi binomiale et on note $B(n\,;p)$.

<u>Exemple :</u>
On a représenté dans un arbre de probabilité les issues d'une expérience suivant un schéma de Bernoulli composé de 3 épreuves de Bernoulli de paramètre p.
X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès.



On a par exemple :

- $P(X = 3) = p^3$.
En effet, en suivant les branches sur le haut de l'arbre, on arrive à 3 succès avec une probabilité de $p \times p \times p = p^3$.

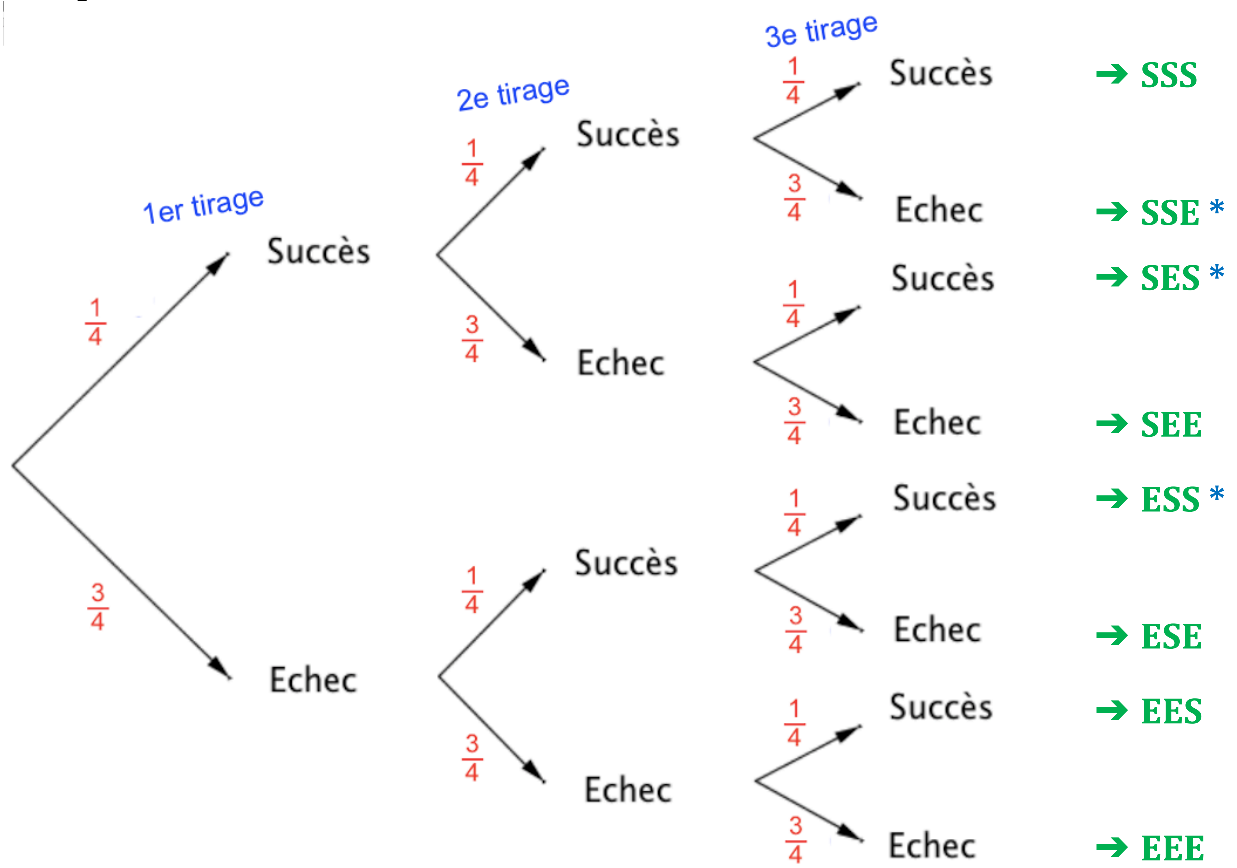
- X = 2 correspond aux suites d'issues suivantes :
(Succès ; Succès ; Échec)
(Succès ; Échec ; Succès)
(Échec ; Succès ; Succès)
Donc $P(X = 2) = 3\ p^2\ (1 – p)$
En effet, les branches qui correspondent à 2 succès et 1 échec, donne une probabilité de $p \times p \times (1 – p) = p^2\ (1 – p)$.
Il y a 3 branches de ce type, soit : $3 \times p^2\ (1 – p)$

<u>Méthode :</u> Calculer une probabilité avec une loi binomiale à l'aide d'un arbre

Vidéo https://youtu.be/b18_r8r4K2s

On tire trois fois de suite avec remise une carte dans un jeu de 4 cartes qui contient une carte *Némo*. On considère comme succès l'événement « Obtenir la carte *Némo*. »
X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.
Calculer $P(X = 2)$. Interpréter le résultat.

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{4}$.
On représente dans un arbre de probabilité les issues de l'expérience composée de 3 tirages.



À l'issue du chemin, on comptabilise les succès et les échecs ⇡

On cherche à calculer $P(X = 2)$, on repère donc les chemins présentant deux succès (*). On en compte 3.

Chacun de ces chemins correspond au calcul de probabilité : $\frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2$

Et donc : $P(X = 2) = 3 \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2$

$$= 3 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{16}$$

$$= \frac{9}{64}$$

La probabilité d'obtenir deux fois la carte *Némo* sur 3 tirages est égale à $\frac{9}{64}$.

3) Avec la calculatrice ou un tableur

Méthode : Utiliser une loi binomiale

Vidéo https://youtu.be/7k4ZYdfWEY8 -Tuto TI

Vidéo https://youtu.be/69lQlJ7lyww - Tuto Casio

Vidéo https://youtu.be/clrAMXKrPV4 - Tuto HP

On lance 7 fois de suite un dé à 6 faces.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois que le dé affiche un nombre supérieur ou égal à 3.
a) Quelle est la loi suivie par X ?
b) Calculer la probabilité $P(X = 5)$.
c) Calculer la probabilité $P(X \leq 5)$.
d) Calculer la probabilité $P(X \geq 3)$.

a) On répète **7 fois** une expérience à deux issues : {3 ; 4 ; 5 ; 6} et {1 ; 2}.
Le **succès** est d'obtenir {3 ; 4 ; 5 ; 6}.
La **probabilité du succès** sur un tirage est égale à $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
X suit donc une loi binomiale de paramètres : n = 7 et $p = \frac{2}{3}$.

b) Avec Texas Instruments :
Touches « *2nd* » et « *VAR* » puis choisir « *binomFdP* ».
Et saisir les paramètres de l'énoncé : binomFdP(7,2/3,5)

Avec Casio :
Touche « *OPTN* » puis choisir « *STAT* », « *DIST* », « *BINM* » et « *Bpd* ».
Et saisir les paramètres de l'énoncé : BinominalePD(5,7,2/3)

Avec le tableur :
Saisir dans une cellule : =LOI.BINOMIALE(5;7;2/3;0)

On trouve $P(X = 5) \approx$ 0,31.
La probabilité d'obtenir 5 fois un nombre supérieur ou égal à 3 est environ égale à 0,31.

c) Avec Texas Instruments :
Touches « *2nd* » et « *VAR* » puis choisir « *binomFRép* ».
Et saisir les paramètres de l'énoncé : binomFRép(7,2/3,5)

Avec Casio :
Touche « *OPTN* » puis choisir « *STAT* », « *DIST* », « *BINM* » et « *Bcd* ».
Et saisir les paramètres de l'énoncé : BinominaleCD(5,7,2/3)

Avec le tableur :
Saisir dans une cellule : =LOI.BINOMIALE(5;7;2/3;1)

On trouve $P(X \leq 5) \approx$ 0,74.
La probabilité d'obtenir au plus 5 fois un nombre supérieur ou égal à 3 est environ égale à 0,74.

d) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$
$\approx 1 - 0{,}045$ (à l'aide de la calculatrice ou du tableur)
$\approx 0{,}955$.

4) Représentation graphique

Méthode : Établir une loi binomiale avec une calculatrice ou un tableur

Vidéo https://youtu.be/8f-cfVFHlxg - Tuto TI

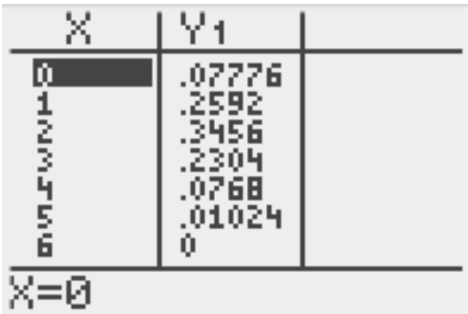
Vidéo https://youtu.be/I9OoHVRpM8U - Tuto Casio

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre n = 5 et p = 0,4.
Représenter graphiquement la loi suivie par X par un diagramme en bâtons.

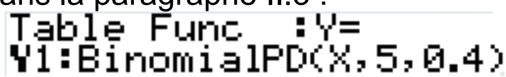
On commence par afficher le tableau de valeurs exprimant $P(X = k)$ pour k entier, $0 \leq k \leq 5$.

Avec Texas Instruments :
Touche « *Y=* » et saisir comme expliqué dans la paragraphe II.3 :

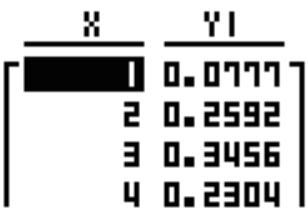
Afficher la table : Touches « *2nd* » et « *GRAPH* » :



Avec Casio :
Dans « *MENU* », choisir « *TABLE* » ;
Saisir comme expliqué dans la paragraphe II.3 :



Afficher la table : Touche « *TABL* » :

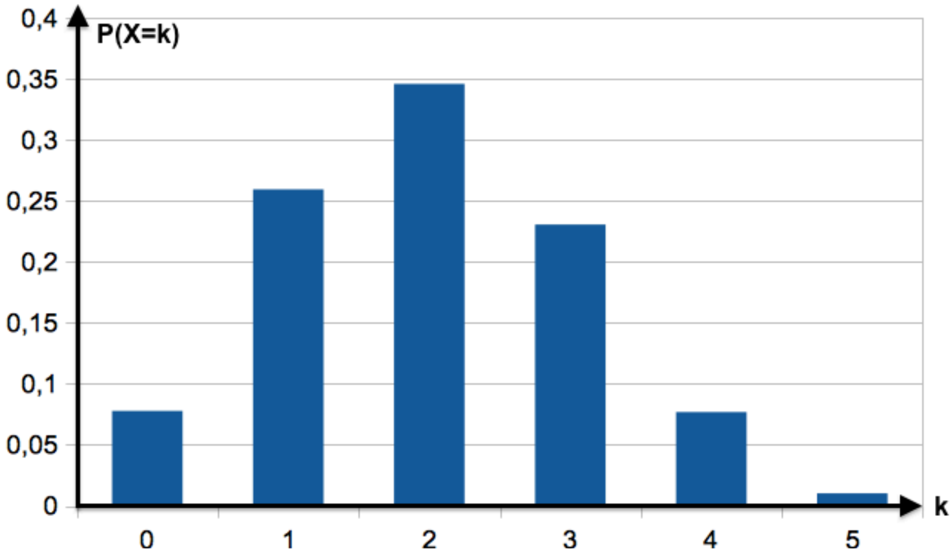


Avec le tableur :
Saisir dans la cellule B1 : =LOI.BINOMIALE(A1;5;0,4;0)
Et copier cette formule vers le bas.

B1 =LOI.BINOMIALE(A1;5;0,4;0)

	A	B	C	D
1	0	0,07776		
2	1	0,2592		
3	2	0,3456		
4	3	0,2304		
5	4	0,0768		
6	5	0,01024		

On représente ensuite la loi binomiale par un diagramme en bâtons :



5) Espérance de la loi binomiale

Exemple :
On lance 5 fois un dé à six faces.
On considère comme succès le fait d'obtenir 5 ou 6.
On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de succès.
On a donc : $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et n = 5.

Propriété : Soit la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètre n et p.
On a : $E(X) = n \times p$

Ainsi :
$E(X) = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \approx 1{,}7$
On peut espérer obtenir environ 1,7 fois un 5 ou un 6, en 5 lancers.

Méthode : Calculer l'espérance d'une loi binomiale

Vidéo https://youtu.be/95t19fznDOU

Un QCM comporte 8 questions. A chaque question, trois solutions sont proposées ; une seule est exacte.
Chaque bonne réponse rapporte 0,5 point.
On répond au hasard à chaque question. Quelle note peut-on espérer obtenir ?

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses.
X suit une loi binomiale de paramètre $n = 8$ et $p = \frac{1}{3}$.

$E(X) = 8 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$

On peut espérer obtenir $\frac{8}{3}$ bonnes réponses en répondant au hasard.
On peut donc espérer obtenir $\frac{8}{3} \times 0{,}5 = \frac{4}{3} \approx 1{,}33$ point en répondant au hasard.