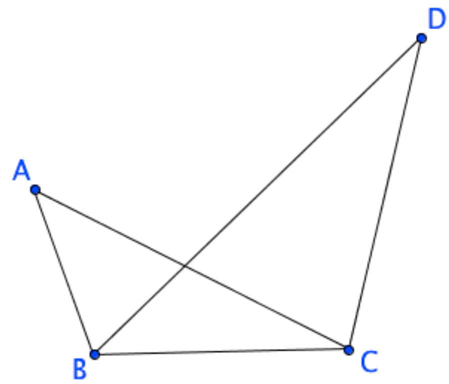
GRAPHES (Partie I)

I. Le vocabulaire des graphes

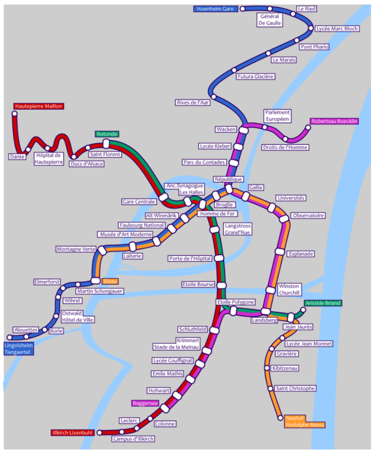


Exemple :

Le schéma suivant s'appelle un **graphe**.
Il possède 4 **sommets** ; on dit qu'il est d'**ordre** 4.
Les sommets A et C sont **adjacents** car ils sont reliés par une arête.
Le sommet C est de **degré** 3 car 3 arêtes partent de C.

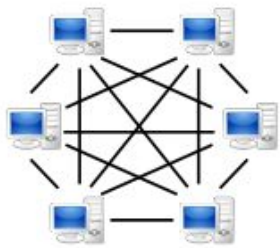
Définitions : - On appelle **graphe non orienté** un ensemble de points, appelés **sommets**, reliés par des lignes, appelées **arêtes**.
- L'**ordre du graphe** est le nombre de sommets.
- Le **degré d'un sommet** est le nombre d'arêtes partant de ce sommet.
- Deux sommets reliés par une arête sont **adjacents**.

Exemple :
La carte ci-contre représente le réseau de tramway de la ville de Strasbourg.
Il s'agit d'un graphe dont les sommets sont les stations.



Définition : Un graphe est dit **complet** si deux sommets quelconques sont adjacents.

Exemple :
Le réseau d'ordinateur représenté ci-contre est un graphe complet en effet tous les sommets sont reliés deux à deux.



Propriété : La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre d'arêtes.

Démonstration :
Chaque arête est comptée exactement deux fois lorsqu'on fait la somme des degrés, une fois pour chaque sommet.

Méthode : Appliquer la propriété de la somme des degrés

Vidéo https://youtu.be/gznmzmzjBsQ

1) Un hectogone est un polygone à 100 côtés. Avec toutes ses diagonales, l'hectogone forme un graphe.
Combien la figure possède-t-elle de segments ?
2) Cinq jeunes souhaitent organiser un tournoi de ping-pong où chaque joueur rencontre trois autres joueurs.
Est-ce possible ?

1) En chaque sommet, le graphe possède 99 arêtes. Le graphe possède 100 sommets donc la somme des degrés de tous les sommets est égale à 99 x 100 = 9900.
D'après la propriété de la somme des degrés, le graphe possède 9900 : 2 = 4950 arêtes (ou segments si l'on considère la figure géométrique).

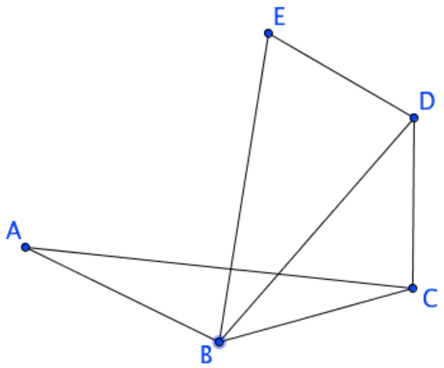
2) L'organisation du tournoi peut se représenter par un graphe d'ordre 5 où chaque sommet possède 3 arêtes.
La somme des degrés est égale à 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15. Donc d'après la propriété de la somme des degrés, le graphe possède 15 : 2 = 7,5 arêtes. Ce qui est impossible donc la situation du tournoi n'est pas réalisable.

Définitions : - Dans un graphe non orienté, une **chaîne** est une succession d'arêtes mises bout à bout.
- La **longueur de la chaîne** est le nombre d'arêtes qui la compose.
- On dit qu'une chaîne est **fermée** si ses extrémités coïncident.
- Un **cycle** est une chaîne fermée dont les arêtes sont toutes distinctes.

Exemple :

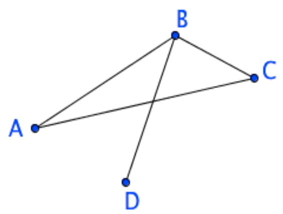
Vidéo https://youtu.be/88D9yWJAYYk

Dans le graphe ci-contre,
- A – B – C – D – E est une chaîne de longueur 4.
- A – B – E – D – B – A est une chaîne fermée de longueur 5.
- B – C – D – E – B est un cycle de longueur 4.

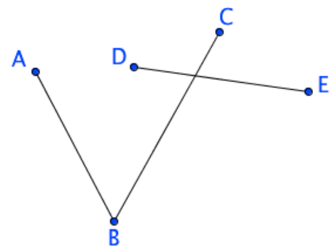


Définition : Un graphe G est **connexe** si chaque couple de sommets est relié par une chaîne.

Exemples :



Graphe connexe



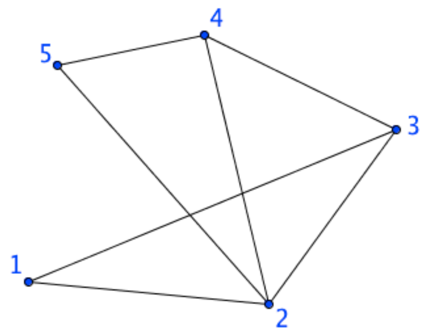
Graphe non connexe, les sommets C et E, par exemple, ne peuvent être reliés.

II. Matrice d'adjacence associée à un graphe

Définition : Soit un graphe G non orienté d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n.
La **matrice d'adjacence** associée à G est la matrice carrée de taille n dont chaque terme a_{ij} est égal au nombre d'arête reliant les sommets i et j.

Exemples :

Vidéo https://youtu.be/JMBCVKiVsic



a) La matrice d'adjacence associée au graphe ci-contre est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \mathbf{0} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par exemple, le coefficient a_{14} marqué en rouge est égal à 0 car aucune arête ne relie les sommets 1 et 4.
Le coefficient a_{42} marqué en vert est égal à 1 car une arête relie les sommets 4 et 2.

On constate que la diagonale est formée de 0 car aucun sommet n'est relié avec lui-même.
On constate également que la matrice est symétrique par rapport à la diagonale car $a_{ij} = a_{ji}$.

b) La matrice d'adjacence associée au graphe ci-dessous est $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque : L'arête dont les extrémités ont le même sommet 1 s'appelle une **boucle**.

Propriété : Soit une matrice d'adjacence A d'un graphe G non orienté d'ordre p dont les sommets sont numérotés de 1 à p.
Le nombre de chaîne de longueur n reliant le sommet i au sommet j est égal au coefficient a_{ij} de la matrice A^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration au programme :
On démontre cette propriété par récurrence.

- **Initialisation :** Les chaînes de longueur 1 qui joignent le sommet i au sommet j correspondent directement au coefficient $(a_1)_{ij}$ de la matrice d'adjacence $A = A^1$.
- **Hérédité :**
  - Hypothèse de récurrence :
  Supposons qu'il existe un entier k tel que la propriété soit vraie :

Le nombre de chaînes de longueur k reliant le sommet i au sommet j est égal au coefficient $(a_k)_{ij}$ de la matrice d'adjacence A^k.

- Démontrons que : La propriété est vraie au rang $k+1$:

Le nombre de chaînes de longueur $k+1$ reliant le sommet i au sommet j est égal au coefficient $(a_{k+1})_{ij}$ de la matrice d'adjacence A^{k+1}.
Soit un troisième sommet l quelconque.
Le nombre de chaînes de longueur $k+1$ allant de i à j, tels que la première arête soit $\{i\,;l\}$ correspond au nombre de chaînes de longueur 1 allant de i à l multiplié par le nombre de chaînes de longueur k allant de l à j, soit :

$c_l =$ (coefficient $(a_1)_{il}$ de la matrice A) $\times$ (coefficient $(a_k)_{lj}$ de la matrice A^k)

Ainsi, le nombre de chaînes de longueur $k+1$ qui joignent deux sommets i à j est égal à la somme des termes c_l pour tous les sommets l, soit le coefficient $(a_{k+1})_{ij}$ de la matrice A^{k+1}.

- **Conclusion :**

La propriété est vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

Exemple :

Vidéo https://youtu.be/FzqGLJ80jLw

On reprend l'exemple a) précédent.
On cherche le nombre de chaînes de longueur 4 reliant les sommets 1 et 3.
A l'aide de la calculatrice, on calcule la matrice A^4.

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 11 & 14 & 9 \\ 13 & 26 & 19 & 19 & 13 \\ 11 & 19 & 19 & 14 & 14 \\ 14 & 19 & 14 & 19 & 11 \\ 9 & 13 & 14 & 11 & 11 \end{pmatrix}$$

Le nombre de chaîne de longueur 4 reliant le sommet 1 au sommet 3 est égal au coefficient a_{13} ou a_{31} de la matrice A^4.
Ainsi, il existe 11 chaînes de longueur 4 reliant les sommets 1 et 3.
Par exemple : 1 – 2 – 5 – 4 – 3 ou encore 1 – 2 – 3 – 2 – 3.