

# GRAPHES – Chapitre 1/2

## Partie 1 : Le vocabulaire des graphes

### Exemple :

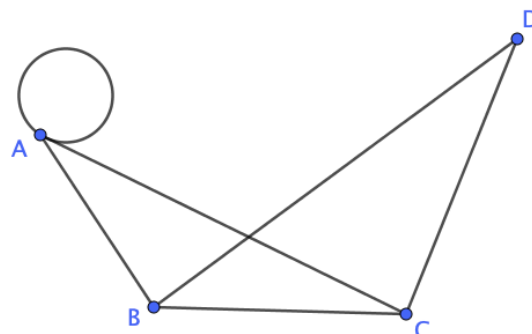
Le schéma suivant s'appelle un **graphe**.

Il possède 4 **sommets** ; on dit qu'il est d'**ordre** 4.

Les sommets A et C sont **adjacents** car ils sont reliés par une arête.

Le sommet C est de **degré** 3 car 3 arêtes partent de C.

Le sommet A possède une **boucle**.



**Définitions :** - On appelle **graphe non orienté** un ensemble de points, appelés **sommets**, reliés par des lignes, appelées **arêtes**.

- L'**ordre du graphe** est le nombre de sommets.

- Le **degré d'un sommet** est le nombre d'arêtes partant de ce sommet.

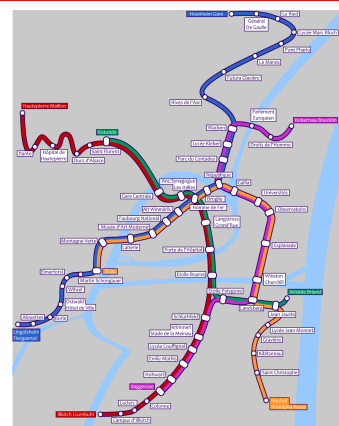
- Deux sommets reliés par une arête sont **adjacents**.

- Une **boucle** est une arête dont les extrémités ont le même sommet.

### Exemple :

La carte ci-contre représente le réseau de tramway de la ville de Strasbourg.

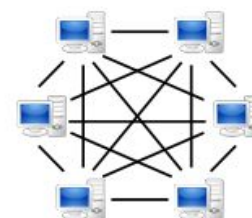
Il s'agit d'un graphe dont les sommets sont les stations.



**Définition :** Un graphe est dit **complet** si deux sommets quelconques sont adjacents.

### Exemple :

Le réseau d'ordinateur représenté ci-contre est un graphe complet en effet tous les sommets sont reliés deux à deux.



**Définition :** Un graphe est dit **simple** s'il ne possède ni boucle, ni arête multiple\*.

\* S'il y a plusieurs arêtes entre deux sommets, on parle d'arêtes multiples.

**Propriété :** La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale au double du nombre d'arêtes.

**Démonstration :** Chaque arête est comptée exactement deux fois lorsqu'on fait la somme des degrés, une fois pour chaque sommet.

**Méthode :** Appliquer la propriété de la somme des degrés

▶ Vidéo <https://youtu.be/gznmzmzjBsQ>

a) Un hectogone est un polygone à 100 côtés. Avec toutes ses diagonales, l'hectogone forme un graphe.

Combien la figure possède-t-elle de segments ?

b) Cinq jeunes souhaitent organiser un tournoi de ping-pong où chaque joueur rencontre trois autres joueurs.

Est-ce possible ?

### Correction

a) En chaque sommet, le graphe possède 99 arêtes. Le graphe possède 100 sommets donc la somme des degrés de tous les sommets est égale à  $99 \times 100 = 9900$ .

D'après la propriété de la somme des degrés, le graphe possède  $9900 : 2 = 4950$  arêtes (ou segments si l'on considère la figure géométrique).

b) L'organisation du tournoi peut se représenter par un graphe d'ordre 5 où chaque sommet possède 3 arêtes.

La somme des degrés est égale à  $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$ . Donc d'après la propriété de la somme des degrés, le graphe possède  $15 : 2 = 7,5$  arêtes. Ce qui est impossible donc la situation du tournoi n'est pas réalisable.

**Définitions :** - Dans un graphe non orienté, une **chaîne** est une succession d'arêtes mises bout à bout.

- La **longueur de la chaîne** est le nombre d'arêtes qui la compose.

- On dit qu'une chaîne est **fermée** si ses extrémités coïncident.

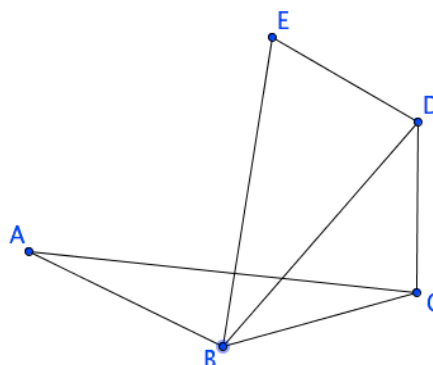
- Un **cycle** est une chaîne fermée dont les arêtes sont toutes distinctes.

**Exemple :**

▶ Vidéo <https://youtu.be/88D9yWJAYYk>

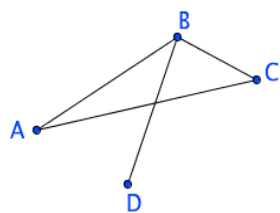
Dans le graphe ci-contre,

- $A - B - C - D - E$  est une chaîne de longueur 4.
- $A - B - E - D - B - A$  est une chaîne fermée de longueur 5.
- $B - C - D - E - B$  est un cycle de longueur 4.

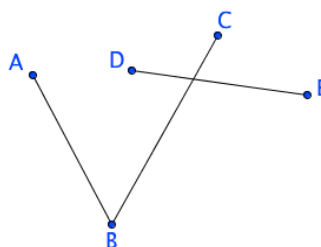


**Définition :** Un graphe  $G$  est **connexe** si chaque couple de sommets est relié par une chaîne.

Exemples :



Graphe connexe



Graphe non connexe, les sommets C et E, par exemple, ne peuvent être reliés.

## Partie 2 : Matrice d'adjacence associée à un graphe

Définition : Soit un graphe  $G$  non orienté d'ordre  $n$  dont les sommets sont numérotés de 1 à  $n$ .

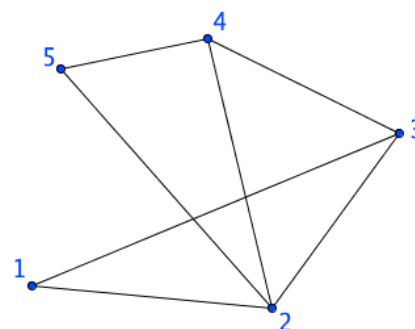
La **matrice d'adjacence** associée à  $G$  est la matrice carrée de taille  $n$  dont chaque terme  $a_{ij}$  est égal au nombre d'arête reliant les sommets  $i$  et  $j$ .

Exemples :

 Vidéo <https://youtu.be/JMBCVKiVsic>

a) La matrice d'adjacence associée au graphe ci-contre est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \mathbf{0} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Par exemple, le coefficient  $a_{14}$  marqué en rouge est égal à 0 car aucune arête ne relie les sommets 1 et 4.

Le coefficient  $a_{42}$  marqué en vert est égal à 1 car une arête relie les sommets 4 et 2.

On constate que la diagonale est formée de 0 car aucun sommet n'est relié avec lui-même. On constate également que la matrice est symétrique par rapport à la diagonale car  $a_{ij} = a_{ji}$ .

b) La matrice d'adjacence associée au graphe ci-dessous est  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$



Propriété : Soit une matrice d'adjacence  $A$  d'un graphe  $G$  non orienté d'ordre  $p$  dont les sommets sont numérotés de 1 à  $p$ .

Le nombre de chaîne de longueur  $n$  reliant le sommet  $i$  au sommet  $j$  est égal au coefficient  $a_{ij}$  de la matrice  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Démonstration au programme :

On démontre cette propriété par récurrence.

- **Initialisation** : Les chaînes de longueur 1 qui joignent le sommet  $i$  au sommet  $j$  correspondent directement au coefficient  $(a_1)_{ij}$  de la matrice d'adjacence  $A = A^1$ .

- **Hérédité** :

- Hypothèse de récurrence :

Supposons qu'il existe un entier  $k$  tel que la propriété soit vraie :

Le nombre de chaînes de longueur  $k$  reliant le sommet  $i$  au sommet  $j$  est égal au coefficient  $(a_k)_{ij}$  de la matrice d'adjacence  $A^k$ .

- Démontrons que : La propriété est vraie au rang  $k + 1$  :

Le nombre de chaînes de longueur  $k + 1$  reliant le sommet  $i$  au sommet  $j$  est égal au coefficient  $(a_{k+1})_{ij}$  de la matrice d'adjacence  $A^{k+1}$ .

Soit un troisième sommet  $l$  quelconque.

Le nombre de chaînes de longueur  $k + 1$  allant de  $i$  à  $j$ , tels que la première arête soit  $\{i ; l\}$  correspond au nombre de chaînes de longueur 1 allant de  $i$  à  $l$  multiplié par le nombre de chaînes de longueur  $k$  allant de  $l$  à  $j$ , soit :

$$c_l = (\text{coefficient } (a_1)_{il} \text{ de la matrice } A) \times (\text{coefficient } (a_k)_{lj} \text{ de la matrice } A^k)$$

Ainsi, le nombre de chaînes de longueur  $k + 1$  qui joignent deux sommets  $i$  à  $j$  est égal à la somme des termes  $c_l$  pour tous les sommets  $l$ , soit le coefficient  $(a_{k+1})_{ij}$  de la matrice  $A^{k+1}$ .

- **Conclusion** :

La propriété est vraie pour  $n = 1$  et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

Exemple :

 Vidéo <https://youtu.be/FzqGLJ80jLw>

On reprend l'exemple a) précédent.

On cherche le nombre de chaînes de longueur 4 reliant les sommets 1 et 3.

A l'aide de la calculatrice, on calcule la matrice  $A^4$ .

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 11 & 14 & 9 \\ 13 & 26 & 19 & 19 & 13 \\ 11 & 19 & 19 & 14 & 14 \\ 14 & 19 & 14 & 19 & 11 \\ 9 & 13 & 14 & 11 & 11 \end{pmatrix}$$

Le nombre de chaîne de longueur 4 reliant le sommet 1 au sommet 3 est égal au coefficient  $a_{13}$  ou  $a_{31}$  de la matrice  $A^4$ .

Ainsi, il existe 11 chaînes de longueur 4 reliant les sommets 1 et 3.

Par exemple : 1 – 2 – 5 – 4 – 3 ou encore 1 – 2 – 3 – 2 – 3.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)