GRAPHES – Chapitre 2/2

**Partie 1 : Graphes orientés et graphes pondérés**

 1) Graphes orientés

Définitions : - Un graphe est **orienté** si ses arêtes, appelées **arcs** dans ce cas, ont un sens de parcours.

- Un **chemin** est une succession d'arcs mis bout à bout.

- Un **circuit** est un chemin fermé dont les arcs sont tous distincts.



Exemple :

Le graphe orienté ci-contre est d'ordre 3 car il possède 3 sommets.

Il possède une boucle sur le sommet A.

A – C – B est un chemin de longueur 2.

B – C – B – A – A – C – B est un chemin fermé de longueur 6.

A – C – B – A est un circuit de longueur 3.

 2) Graphes pondérés

Définitions : - Un graphe est **étiqueté** si ses arêtes (ou ses arcs) sont affectées d'étiquettes (mots, lettres, symboles, nombres, …)

- Dans le cas où les étiquettes sont des nombres, le graphe est dit **pondéré**. Les étiquettes sont appelées les **poids** entre les sommets.

- Le poids du chaîne (respectivement d'un chemin) est la somme des poids des arêtes (respectivement des arcs) constituant la chaîne (respectivement le chemin).



Exemple :

Le graphe orienté ci-contre est pondéré.

Le poids entre le sommet B et le sommet A est égal à 5.

Le poids du chemin B – C – B – A est égal à :

1 + 3 + 5 = 9

 **Vidéo** [**https://youtu.be/ZEiOWcqX7S4**](https://youtu.be/ZEiOWcqX7S4)

Remarque :

Le chemin le plus court entre deux sommets est le chemin qui a le poids minimum.

 3) Matrice d’adjacence associée à un graphe orienté

Définition : Soit un graphe $G $orienté d'ordre $n $dont les sommets sont numérotés de 1

à $n$.

La **matrice d'adjacence** associée à $G$ est la matrice carrée de taille $n$ dont chaque terme $a\_{ij}$ est égal au nombre d'arcs orientés reliant le sommet $i$ vers le sommet $j$.

Exemple :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/yRBCx3uxN9A**](https://youtu.be/yRBCx3uxN9A)

La matrice d'adjacence associée au graphe ci-contre est :

$$A=\left(\begin{matrix}0&1&1\\1&1&1\\0&0&0\end{matrix}\right)$$

**Partie 2 : Chaîne de Markov**

1) Définition

Dans une équipe de football, on étudie les passes que se font trois attaquants $A$, $B$ et $C$.

Les probabilités qu'un attaquant passe le ballon à un autre sont schématisées sur le graphe orienté et pondéré suivant. Chaque passe de ballon correspond à une nouvelle expérience aléatoire dont les issues sont $A$, $B$ ou $C$ (un des trois attaquants est susceptible de recevoir le ballon).

Par exemple, la probabilité que l'attaquant $A$ passe le ballon à l'attaquant $B$ est égale à $\frac{2}{3}$.

Les poids des arcs sont alors des probabilités.

Un tel schéma est appelé un **graphe probabiliste**.

Définition : Un **graphe probabiliste** est un graphe orienté et pondéré possédant au plus un arc entre deux sommets et dont la somme des poids des arcs issus d'un même sommet est égale à 1.

Par exemple, la somme des poids issus de $A$ est égal à $\frac{2}{3}+$ $\frac{1}{3}$ $= 1$

 2) Marche aléatoire

On considère la variable aléatoire $X\_{n}$ prenant les valeurs $A$, $B$ ou $C$ à l'étape $n$.

$A$, $B$ ou $C$ s'appelle les **états** de $X\_{n}$.

Par exemple, $X\_{3}=B$ signifie que l'attaquant $B$ possède le ballon après la 3e passe.

La suite de variables aléatoires $\left(X\_{n}\right)$ est appelée **marche aléatoire** ou **chaîne de Markov** sur l'ensemble des issues $\left\{A ;B ;C\right\}$.

Dans une chaîne de Markov, l'état du processus à l'étape $n+1$ ne dépend que de celui à l'état $n$, mais non de ses états antérieurs. Ainsi, la probabilité que l'attaquant $C$ possède le ballon ne dépend que de la position précédente du ballon (en $A$ ou en $B$) mais non de ses positions antérieures.

 3) Probabilité de transition

On considère la loi de probabilité de $X\_{n}$, appelée **probabilité de transition**, qui donne la probabilité qu'un attaquant possède le ballon à l'étape $n$ ($n$-ième passe).

On note par exemple $P\_{X\_{n}=A}\left(X\_{n+1}=C\right)=$ $\frac{1}{3}$ : la probabilité que le ballon se trouve chez l'attaquant $C$ après la ($n+1)$-ième passe sachant que c'est l'attaquant $A$ qui envoie le ballon. Il s'agit d'une probabilité conditionnelle.

Cette probabilité ne dépend pas de $n$.

 4) Matrice de transition

Définition : La **matrice de transition** d'une chaîne de Markov est la matrice carrée d'ordre $n$ dont le coefficient $p\_{ij}$ situé sur la ligne $i$ et la colonne $j$ est la probabilité de transition portée par l'arc reliant le sommet $i$ vers le sommet $j$ s'il existe et 0 dans le cas contraire.

 **Vidéo** [**https://youtu.be/KRi0C\_zOsHs**](https://youtu.be/KRi0C_zOsHs)

Dans l'exemple, la matrice de transition est :

$$P=\left(\begin{matrix}0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0,5&0&0,5\\\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&0\end{matrix}\right)\begin{matrix}\begin{matrix}\leftarrow Transition du sommet A vers les autres sommets\\ \end{matrix}\\\begin{matrix}\leftarrow Transition du sommet B vers les autres sommets\\ \end{matrix}\\\leftarrow Transition du sommet C vers les autres sommets\end{matrix}$$

$$ Vers A\uparrow \uparrow Vers C$$

$$ \uparrow Vers B $$

On trouve par exemple à l'intersection de la première ligne et de la deuxième colonne la probabilité que le ballon arrive chez l'attaquant *B* alors qu'il se trouvait chez l'attaquant *A*.

Remarques :

- Le coefficient $p\_{11}$ de la matrice $P$ est nul car la probabilité que l'attaquant *A* garde le ballon est nulle. Il en est de même pour les coefficients $p\_{22}$ et $p\_{33}$.

- La somme des coefficients d'une même ligne d'une matrice de transition est égale à 1.

Définition : L'**état probabiliste après** $n$ **étapes** de la chaîne de Markov est la matrice ligne dont les coefficients sont les probabilités d'arrivée en chaque sommet après $n$ étapes.

Exemple : Dans l'exemple des passeurs au football, la matrice ligne des états après la 3e étape donnerait les probabilités que le ballon se trouve chez l'attaquant *A*, chez l'attaquant *B* et chez l'attaquant *C* après 3 passes.

L'arbre de probabilité ci-contre permet de résumer les probabilités de transition de l'étape $n$ à l'étape $n+1$.

On note $p\_{n}$, $q\_{n}$ et $r\_{n}$ les probabilités que le ballon se trouve respectivement chez l’attaquant $A$, chez le $B$ et chez le $C$ après la $n$-ième passe.

A l'aide de la formule des probabilités totales, on a :

$$\left\{\begin{array}{c}p\_{n+1}=0,5q\_{n}+\frac{3}{4}r\_{n}\\q\_{n+1}=\frac{2}{3}p\_{n}+\frac{1}{4}r\_{n }\\r\_{n+1}=\frac{1}{3}p\_{n}+0,5q\_{n}\end{array}\right.$$

On note $π\_{n}=\left(\begin{matrix}p\_{n}&q\_{n}&r\_{n}\end{matrix}\right)$ la matrice ligne des états de la chaîne de Markov après $n$ étapes.

On a alors : $π\_{n+1}=π\_{n}×P$.

Propriété : On considère une chaîne de Markov de matrice de transition $P$ et dont la matrice ligne des états à l'étape $n$ est $π\_{n}$.

Pour tout entier naturel $n$, on a : $π\_{n+1}=π\_{n}×P$ et $π\_{n}=π\_{0}×P^{n}$ où$π\_{0}$ est l'état initial.

Démonstration au programme :

* On note :

- $π\_{n}=\left(\begin{matrix}p\_{n}&q\_{n}&r\_{n}\end{matrix}\right)$ la matrice ligne des états de la chaîne de Markov après $n$ étapes.

- $A$, $B$ et $C$ les états de $X\_{n}$.

$$p\_{n+1}=P(X\_{n+1}=A)$$

$$ =P\_{X\_{n}=A}(X\_{n+1}=A) P(X\_{n}=A)+P\_{X\_{n}=B}(X\_{n+1}=A) P(X\_{n}=B)+P\_{X\_{n}=C}(X\_{n+1}=A)$$

$$ P(X\_{n}=C),$$

selon la formule des probabilités totales.

Soit : $p\_{n+1}=P\_{X\_{n}=A}(X\_{n+1}=A) p\_{n}+P\_{X\_{n}=B}(X\_{n+1}=A) q\_{n}+P\_{X\_{n}=C}(X\_{n+1}=A)r\_{n}$.

On reconnait le premier coefficient du produit $π\_{n}×P.$

On prouve de même que $q\_{n+1}$ et $r\_{n+1}$ sont respectivement le deuxième et troisième coefficient du produit $π\_{n}×P.$

* La démonstration de l’expression explicite $π\_{n}=π\_{0}×P^{n}$ est semblable à celle faites dans le cadre des suites numériques.

Exemple :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/gxrgpotHfnE**](https://youtu.be/gxrgpotHfnE)

Dans l'exemple précédent, on suppose l'attaquant $A$ possède le ballon à l'étape 0.

La matrice ligne des états après la 3e étape est égale à :$ π\_{3}=π\_{0}×P^{3}$.

On a : $π\_{0}=\left(\begin{matrix}1&0&0\end{matrix}\right)$ car le ballon part de $A$.

Avec la calculatrice, on obtient :

$$P^{3}=\left(\begin{matrix}0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0,5&0&0,5\\\frac{3}{4}&\frac{1}{4}&0\end{matrix}\right)^{3}=\left(\begin{matrix}\frac{7}{24}&\frac{17}{36}&\frac{17}{72}\\\frac{17}{48}&\frac{7}{24}&\frac{17}{48}\\\frac{17}{32}&\frac{17}{96}&\frac{7}{24}\end{matrix}\right)$$

Donc :

$$π\_{3}=π\_{0}×P^{3}=\left(\begin{matrix}1&0&0\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\frac{7}{24}&\frac{17}{36}&\frac{17}{72}\\\frac{17}{48}&\frac{7}{24}&\frac{17}{48}\\\frac{17}{32}&\frac{17}{96}&\frac{7}{24}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}\frac{7}{24}&\frac{17}{36}&\frac{17}{72}\end{matrix}\right)$$

Ainsi par exemple, la probabilité que l'attaquant $C$ possède le ballon après la 3e passe est égale à $\frac{17}{72}$ $≈0,24$.

**Partie 3 : Distribution invariante d'une chaîne de Markov**

 1) Chaîne de Markov convergente

Définition : On dit qu'une **chaîne de Markov de matrice de transition** $P$ **est convergente** si la suite des matrices lignes $\left(π\_{n}\right)$ des états de la chaîne de Markov converge.

Définition : Si la suite $\left(π\_{n}\right)$ des états d'une chaîne de Markov convergente vérifie $π\_{n+1}=π\_{n}×P$ alors la limite $π$ de cette suite définit un **état stable** solution de l'équation $ π=πP$.



Méthode : Étudier une distribution invariante d'une

chaîne de Markov à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel

On considère la chaîne de Markov sur le graphe ci-contre où l'on part de $A$.

A l'aide de la calculatrice, déterminer l'état stable de cette chaîne de Markov. On admet que la chaîne de Markov est convergente (distribution invariante).

**Correction**

La matrice de transition est $P=\left(\begin{matrix}0&0&1\\0,5&0&0,5\\0&0,5&0,5\end{matrix}\right)$.

Pour tout entier naturel $n$, on a : $π\_{n+1}=π\_{n}×P,$ où $\left(π\_{n}\right)$ est la suite des matrices lignes des états de la chaîne de Markov.

On a donc : $π\_{n}=π\_{0}×P^{n}$ avec $π\_{0}=\left(\begin{matrix}1&0&0\end{matrix}\right)$ car on part de *A*.

A l'aide de la calculatrice, calculons par exemple $π\_{10}$ :



On peut effectuer les calculs pour des puissances de $P$ de plus en plus grandes. On constate que l'état stable semble être la matrice ligne :

$$π=\left(\begin{matrix}\frac{1}{7}&\frac{2}{7}&\frac{4}{7}\end{matrix}\right)$$

L'état stable *P* vérifie l'équation $π=πP$, en effet :



Remarque :

Cette méthode ne prouve pas que la chaîne de Markov est convergente.

En supposant qu'elle l'est, elle permet seulement de déterminer l'état stable.

 2) Cas d'un graphe à deux sommets

Propriété : On considère une chaîne de Markov de matrice de transition $P$ sur un graphe à deux sommets où $0<p<1$ et $0<q<1.$ :



Alors on a : $P=\left(\begin{matrix}1-p&p\\q&1-q\end{matrix}\right).$ Et la suite des matrices lignes $\left(π\_{n}\right)$ des états de la chaîne de Markov converge vers un état stable $π$ tel que $π=πP$.

$π$ ne dépend pas de l'état initial $π\_{0}$.

Démonstration :

Pour tout entier naturel *n*, on note $π\_{n}=\left(\begin{matrix}p\_{n}&q\_{n}\end{matrix}\right)$ avec $p\_{n}+q\_{n}=1$.

Comme $π\_{n+1}=π\_{n}×P$, on a :

$$p\_{n+1}=p\_{n}\left(1-p\right)+q\_{n}×q=p\_{n}\left(1-p\right)+\left(1-p\_{n}\right)×q=p\_{n}\left(1-p-q\right)+q$$

Pour tout entier naturel $n$, on pose : $u\_{n}=p\_{n}-$ $\frac{q}{p+q}$ et on a :

$u\_{n+1}=p\_{n+1}-$ $\frac{q}{p+q}$

$ =p\_{n}\left(1-p-q\right)+q$ $-$ $\frac{q}{p+q}$

$ =p\_{n}\left(1-p-q\right)$ $-$ $\frac{q\left(1-p-q\right)}{p+q}$

$$ =\left(1-p-q\right)\left(p\_{n}-\frac{q}{p+q}\right)$$

$$ =\left(1-p-q\right)u\_{n}$$

$\left(u\_{n}\right)$ est donc une suite géométrique de raison $1-p-q$.

Comme $0<p+q<2$, on a $\left|1-p-q\right|<1$ et donc $\left(u\_{n}\right)$ converge vers 0.

D'où $\left(p\_{n}\right)$ converge vers $\frac{q}{p+q}$.

Comme $q\_{n}=1-p\_{n}$, $\left(q\_{n}\right)$ converge vers $\frac{p}{p+q}$.

Les limites de $\left(p\_{n}\right)$ et $\left(q\_{n}\right)$ ne dépendent donc pas de l'état initial.

Méthode : Étudier une distribution invariante d'une chaîne de Markov sur un graphe à deux sommets

 **Vidéo** [**https://youtu.be/PS756B-M0Dw**](https://youtu.be/PS756B-M0Dw)

On considère la chaîne de Markov sur le graphe ci-dessous :



Étudier la convergence de la chaîne de Markov.

**Correction**

La matrice de transition est $P=\left(\begin{matrix}0,4&0,6\\0,3&0,7\end{matrix}\right)$.

Pour tout entier naturel $n$, on a : $π\_{n+1}=π\_{n}×P$ où $\left(π\_{n}\right)$ est la suite des matrices lignes des états de la chaîne de Markov.

L'état stable $π=\left(\begin{matrix}p&q\end{matrix}\right)$ vérifie l'équation $π=πP$, soit :

$$\left(\begin{matrix}p&q\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}p&q\end{matrix}\right)×\left(\begin{matrix}0,4&0,6\\0,3&0,7\end{matrix}\right)$$

Ainsi, on a le système : $\left\{\begin{array}{c}p=0,4p+0,3q\\q=0,6p+0,7q\end{array}\right.$

$$⟺\left\{\begin{array}{c}0,6p=0,3q\\0,3q=0,6p\end{array}\right.$$

$$⟺q=2p$$

Comme $p+q=1$, on a $1-p=2p$ et donc $p=$ $\frac{1}{3}$ et donc $q=$ $\frac{2}{3}$.

L'état stable du graphe est donc :

$$π=\left(\begin{matrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{matrix}\right)$$

Cela signifie que, quel que soit l'état initial (départ de $A$ ou de $B$), les probabilités d'être en $A$ et en $B$ tendent respectivement vers $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$.

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)