

GRAPHES – Chapitre 2/2

Partie 1 : Graphes orientés et graphes pondérés

1) Graphes orientés

Définitions : - Un graphe est **orienté** si ses arêtes, appelées **arcs** dans ce cas, ont un sens de parcours.

- Un **chemin** est une succession d'arcs mis bout à bout.

- Un **circuit** est un chemin fermé dont les arcs sont tous distincts.

Exemple :

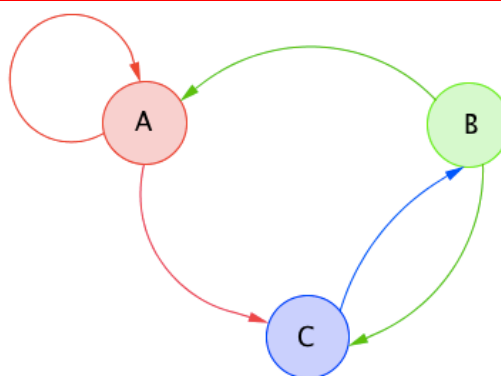
Le graphe orienté ci-contre est d'ordre 3 car il possède 3 sommets.

Il possède une boucle sur le sommet A.

A – C – B est un chemin de longueur 2.

B – C – B – A – A – C – B est un chemin fermé de longueur 6.

A – C – B – A est un circuit de longueur 3.



2) Graphes pondérés

Définitions : - Un graphe est **étiqueté** si ses arêtes (ou ses arcs) sont affectées d'étiquettes (mots, lettres, symboles, nombres, ...)

- Dans le cas où les étiquettes sont des nombres, le graphe est dit **pondéré**. Les étiquettes sont appelées les **poids** entre les sommets.

- Le poids d'une chaîne (respectivement d'un chemin) est la somme des poids des arêtes (respectivement des arcs) constituant la chaîne (respectivement le chemin).

Exemple :

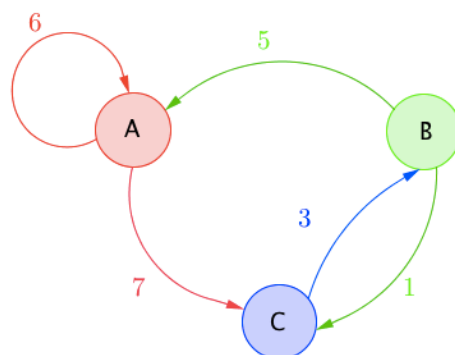
Le graphe orienté ci-contre est pondéré.

Le poids entre le sommet B et le sommet A est égal à 5.

Le poids du chemin B – C – B – A est égal à :

$$1 + 3 + 5 = 9$$

 **Vidéo** <https://youtu.be/ZEiOWcqX7S4>



Remarque :

Le chemin le plus court entre deux sommets est le chemin qui a le poids minimum.

3) Matrice d'adjacence associée à un graphe orienté

Définition : Soit un graphe G orienté d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n .

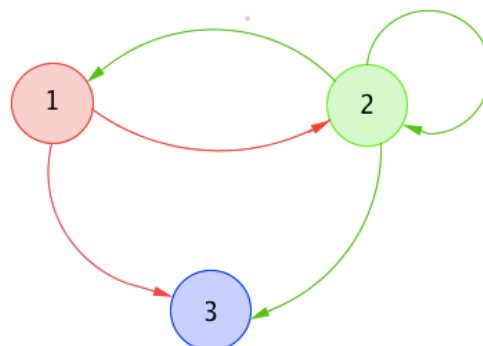
La **matrice d'adjacence** associée à G est la matrice carrée de taille n dont chaque terme a_{ij} est égal au nombre d'arcs orientés reliant le sommet i vers le sommet j .

Exemple :

📺 Vidéo <https://youtu.be/yRBCx3uxN9A>

La matrice d'adjacence associée au graphe ci-contre est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Partie 2 : Chaîne de Markov

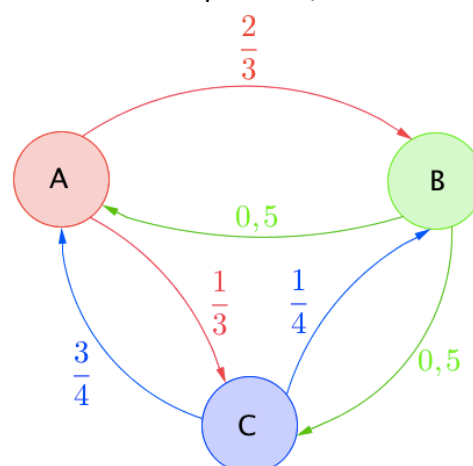
1) Définition

Dans une équipe de football, on étudie les passes que se font trois attaquants A , B et C . Les probabilités qu'un attaquant passe le ballon à un autre sont schématisées sur le graphe orienté et pondéré suivant. Chaque passe de ballon correspond à une nouvelle expérience aléatoire dont les issues sont A , B ou C (un des trois attaquants est susceptible de recevoir le ballon).

Par exemple, la probabilité que l'attaquant A passe le ballon à l'attaquant B est égale à $\frac{2}{3}$.

Les poids des arcs sont alors des probabilités.

Un tel schéma est appelé un **graphe probabiliste**.



Définition : Un **graphe probabiliste** est un graphe orienté et pondéré possédant au plus un arc entre deux sommets et dont la somme des poids des arcs issus d'un même sommet est égale à 1.

Par exemple, la somme des poids des arcs issus de A est égale à : $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$.

2) Marche aléatoire

On considère la variable aléatoire X_n prenant les valeurs A , B ou C à l'étape n .
 A , B ou C s'appelle les **états** de X_n .

Par exemple, $X_3 = B$ signifie que l'attaquant B possède le ballon après la 3^e passe.

La suite de variables aléatoires (X_n) est appelée **marche aléatoire** ou **chaîne de Markov** sur l'ensemble des issues $\{A ; B ; C\}$.

Dans une chaîne de Markov, l'état du processus à l'étape $n + 1$ ne dépend que de celui à l'état n , mais non de ses états antérieurs. Ainsi, la probabilité que l'attaquant C possède le ballon ne dépend que de la position précédente du ballon (en A ou en B) mais non de ses positions antérieures.

3) Probabilité de transition

On considère la loi de probabilité de X_n , appelée **probabilité de transition**, qui donne la probabilité qu'un attaquant possède le ballon à l'étape n (n -ième passe).

On note par exemple $P_{X_n=A}(X_{n+1} = C) = \frac{1}{3}$: la probabilité que le ballon se trouve chez l'attaquant C après la $(n + 1)$ -ième passe sachant que c'est l'attaquant A qui envoie le ballon. Il s'agit d'une probabilité conditionnelle.

Cette probabilité ne dépend pas de n .

4) Matrice de transition

Définition : La **matrice de transition** d'une chaîne de Markov est la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient p_{ij} situé sur la ligne i et la colonne j est la probabilité de transition portée par l'arc reliant le sommet i vers le sommet j s'il existe et 0 dans le cas contraire.

 **Vidéo** https://youtu.be/KRi0C_zOsHs

Dans l'exemple, la matrice de transition est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Transition du sommet } A \text{ vers les autres sommets} \\ \leftarrow \text{Transition du sommet } B \text{ vers les autres sommets} \\ \leftarrow \text{Transition du sommet } C \text{ vers les autres sommets} \end{array}$$

$\begin{array}{ccc} \text{Vers } A \uparrow & & \uparrow \text{Vers } C \\ & \uparrow \text{Vers } B & \end{array}$

On trouve par exemple à l'**intersection de la première ligne et de la deuxième colonne** la probabilité que le ballon arrive chez l'attaquant B alors qu'il se trouvait chez l'attaquant A .

Remarques :

- Le coefficient p_{11} de la matrice P est nul car la probabilité que l'attaquant A garde le ballon est nulle. Il en est de même pour les coefficients p_{22} et p_{33} .
- La somme des coefficients d'une même ligne d'une matrice de transition est égale à 1.

Définition : L'état probabiliste après n étapes de la chaîne de Markov est la matrice ligne dont les coefficients sont les probabilités d'arrivée en chaque sommet après n étapes.

Exemple : Dans l'exemple des passeurs au football, la matrice ligne des états après la 3^e étape donnerait les probabilités que le ballon se trouve chez l'attaquant A, chez l'attaquant B et chez l'attaquant C après 3 passes.

L'arbre de probabilité ci-contre permet de résumer les probabilités de transition de l'étape n à l'étape $n + 1$.

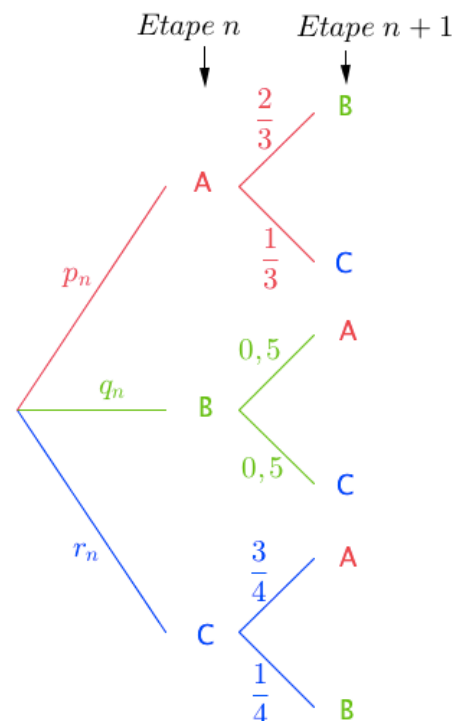
On note p_n , q_n et r_n les probabilités que le ballon se trouve respectivement chez l'attaquant A, chez le B et chez le C après la n -ième passe.

A l'aide de la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{cases} p_{n+1} = 0,5q_n + \frac{3}{4}r_n \\ q_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{4}r_n \\ r_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + 0,5q_n \end{cases}$$

On note $\pi_n = (p_n \quad q_n \quad r_n)$ la matrice ligne des états de la chaîne de Markov après n étapes.

On a alors : $\pi_{n+1} = \pi_n \times P$.



Propriété : On considère une chaîne de Markov de matrice de transition P et dont la matrice ligne des états à l'étape n est π_n .

Pour tout entier naturel n , on a : $\pi_{n+1} = \pi_n \times P$ et $\pi_n = \pi_0 \times P^n$ où π_0 est l'état initial.

Démonstration au programme :

• On note :

- $\pi_n = (p_n \quad q_n \quad r_n)$ la matrice ligne des états de la chaîne de Markov après n étapes.

- A, B et C les états de X_n .

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(X_{n+1} = A) \\ &= P_{X_n=A}(X_{n+1} = A) P(X_n = A) + P_{X_n=B}(X_{n+1} = A) P(X_n = B) + P_{X_n=C}(X_{n+1} = A) P(X_n = C), \end{aligned}$$

selon la formule des probabilités totales.

Soit : $p_{n+1} = P_{X_n=A}(X_{n+1} = A) p_n + P_{X_n=B}(X_{n+1} = A) q_n + P_{X_n=C}(X_{n+1} = A) r_n$.

On reconnaît le premier coefficient du produit $\pi_n \times P$.

On prouve de même que q_{n+1} et r_{n+1} sont respectivement le deuxième et troisième coefficient du produit $\pi_n \times P$.

• La démonstration de l'expression explicite $\pi_n = \pi_0 \times P^n$ est semblable à celle faites dans le cadre des suites numériques.

Exemple :

Yvan Monka – Académie de Strasbourg – www.maths-et-tiques.fr

 Vidéo <https://youtu.be/gxrgpotHfnE>

Dans l'exemple précédent, on suppose l'attaquant A possède le ballon à l'étape 0.

La matrice ligne des états après la 3^e étape est égale à : $\pi_3 = \pi_0 \times P^3$.

On a : $\pi_0 = (1 \ 0 \ 0)$ car le ballon part de A .

Avec la calculatrice, on obtient :

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{17}{36} & \frac{17}{72} \\ \frac{17}{48} & \frac{7}{24} & \frac{17}{48} \\ \frac{17}{32} & \frac{17}{96} & \frac{7}{24} \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\pi_3 = \pi_0 \times P^3 = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{17}{36} & \frac{17}{72} \\ \frac{17}{48} & \frac{7}{24} & \frac{17}{48} \\ \frac{17}{32} & \frac{17}{96} & \frac{7}{24} \end{pmatrix} = \left(\frac{7}{24} \ \frac{17}{36} \ \frac{17}{72} \right)$$

Ainsi par exemple, la probabilité que l'attaquant C possède le ballon après la 3^e passe est égale à $\frac{17}{72} \approx 0,24$.

Partie 3 : Distribution invariante d'une chaîne de Markov

1) Chaîne de Markov convergente

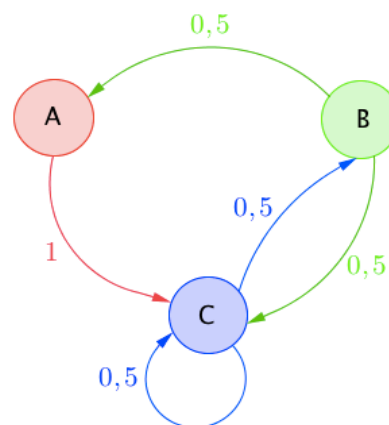
Définition : On dit qu'une **chaîne de Markov de matrice de transition P est convergente** si la suite des matrices lignes (π_n) des états de la chaîne de Markov converge.

Définition : Si la suite (π_n) des états d'une chaîne de Markov convergente vérifie $\pi_{n+1} = \pi_n \times P$ alors la limite π de cette suite définit un **état stable** solution de l'équation $\pi = \pi P$.

Méthode : Étudier une distribution invariante d'une chaîne de Markov à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel

On considère la chaîne de Markov sur le graphe ci-contre où l'on part de A .

A l'aide de la calculatrice, déterminer l'état stable de cette chaîne de Markov. On admet que la chaîne de Markov est convergente (distribution invariante).



Correction

La matrice de transition est $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n , on a : $\pi_{n+1} = \pi_n \times P$, où (π_n) est la suite des matrices lignes des états de la chaîne de Markov.

On a donc : $\pi_n = \pi_0 \times P^n$ avec $\pi_0 = (1 \ 0 \ 0)$ car on part de A.

A l'aide de la calculatrice, calculons par exemple π_{10} :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}^{10} \\ \begin{bmatrix} 0,142578 & 0,285156 & 0,572266 \end{bmatrix}$$

On peut effectuer les calculs pour des puissances de P de plus en plus grandes. On constate que l'état stable semble être la matrice ligne :

$$\pi = \left(\frac{1}{7} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{4}{7} \right)$$

L'état stable P vérifie l'équation $\pi = \pi P$, en effet :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

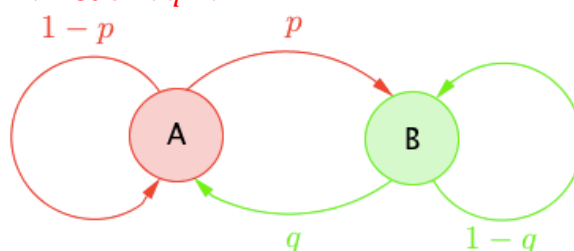
Remarque :

Cette méthode ne prouve pas que la chaîne de Markov est convergente.

En supposant qu'elle l'est, elle permet seulement de déterminer l'état stable.

2) Cas d'un graphe à deux sommets

Propriété : On considère une chaîne de Markov de matrice de transition P sur un graphe à deux sommets où $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$:



Alors on a : $P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$. Et la suite des matrices lignes (π_n) des états de la chaîne de Markov converge vers un état stable π tel que $\pi = \pi P$.

π ne dépend pas de l'état initial π_0 .

Démonstration :

Pour tout entier naturel n , on note $\pi_n = (p_n \quad q_n)$ avec $p_n + q_n = 1$.

Comme $\pi_{n+1} = \pi_n \times P$, on a :

$$p_{n+1} = p_n(1-p) + q_n \times q = p_n(1-p) + (1-p_n) \times q = p_n(1-p-q) + q$$

Pour tout entier naturel n , on pose : $u_n = p_n - \frac{q}{p+q}$ et on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{q}{p+q} \\ &= p_n(1-p-q) + q - \frac{q}{p+q} \\ &= p_n(1-p-q) - \frac{q(1-p-q)}{p+q} \\ &= (1-p-q) \left(p_n - \frac{q}{p+q} \right) \\ &= (1-p-q)u_n \end{aligned}$$

(u_n) est donc une suite géométrique de raison $1-p-q$.

Comme $0 < p+q < 2$, on a $|1-p-q| < 1$ et donc (u_n) converge vers 0.

D'où (p_n) converge vers $\frac{q}{p+q}$.

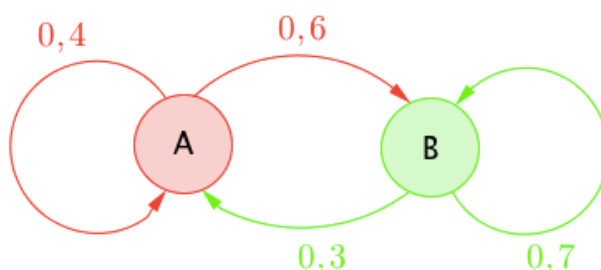
Comme $q_n = 1 - p_n$, (q_n) converge vers $\frac{p}{p+q}$.

Les limites de (p_n) et (q_n) ne dépendent donc pas de l'état initial.

Méthode : Étudier une distribution invariante d'une chaîne de Markov sur un graphe à deux sommets

 Vidéo <https://youtu.be/PS756B-M0Dw>

On considère la chaîne de Markov sur le graphe ci-dessous. On admet que la chaîne de Markov est convergente (distribution invariante).



Étudier la convergence de la chaîne de Markov.

Correction

La matrice de transition est $P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n , on a : $\pi_{n+1} = \pi_n \times P$ où (π_n) est la suite des matrices lignes des états de la chaîne de Markov.

L'état stable $\pi = (p \quad q)$ vérifie l'équation $\pi = \pi P$, soit :

$$(p \quad q) = (p \quad q) \times \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a le système : $\begin{cases} p = 0,4p + 0,3q \\ q = 0,6p + 0,7q \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,6p = 0,3q \\ 0,3q = 0,6p \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow q = 2p$$

Comme $p + q = 1$, on a $1 - p = 2p$ et donc $p = \frac{1}{3}$ et donc $q = \frac{2}{3}$.

L'état stable du graphe est donc :

$$\pi = \left(\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \right)$$

Cela signifie que, quel que soit l'état initial (départ de A ou de B), les probabilités d'être en A et en B tendent respectivement vers $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales