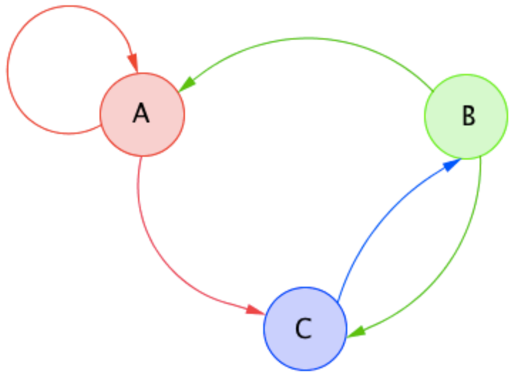
GRAPHES (Partie 2)

I. Graphes orientés et graphes pondérés

1) Graphes orientés

Définitions : - Un graphe est **orienté** si ses arêtes, appelées **arcs** dans ce cas, ont un sens de parcours.
- Un **chemin** est une succession d'arcs mis bout à bout.
- Un **circuit** est un chemin fermé dont les arcs sont tous distincts.

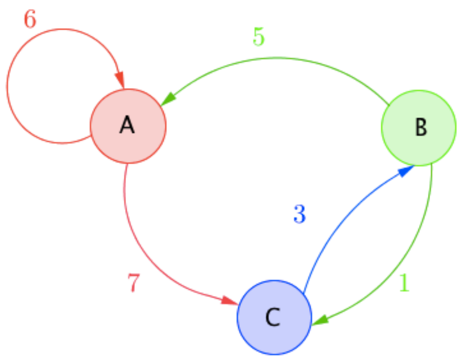
Exemple :
Le graphe orienté ci-contre est d'ordre 3 car il possède 3 sommets.
Il possède une boucle sur le sommet A.
A – C – B est un chemin de longueur 2.
B – C – B – A – A – C – B est un chemin fermé de longueur 6.
A – C – B – A est un circuit de longueur 3.



2) Graphes pondérés

Définitions : - Un graphe est **étiqueté** si ses arêtes (ou ses arcs) sont affectés d'étiquettes (mots, lettres, symboles, nombres, …)
- Dans le cas où les étiquettes sont des nombres, le graphe est dit **pondéré**. Les étiquettes sont appelées les **poids** entre les sommets.
- Le poids du chaîne (respectivement d'un chemin) est la somme des poids des arêtes (respectivement des arcs) constituant la chaîne (respectivement le chemin).

Exemple :
Le graphe orienté ci-contre est pondéré.
Le poids entre le sommet B et le sommet A est égal à 5.
Le poids du chemin B – C – B – A est égal à :
1 + 3 + 5 = 9



Vidéo https://youtu.be/ZEiOWcqX7S4

Remarque :
Le chemin le plus court entre deux sommets est le chemin qui a le poids minimum.

3) Matrice d'adjacence associée à un graphe orienté

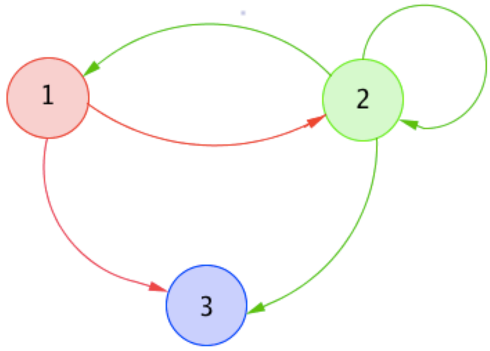
Définition : Soit un graphe G orienté d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n.
La **matrice d'adjacence** associée à G est la matrice carrée de taille n dont chaque terme a_{ij} est égal au nombre d'arcs orientés reliant le sommet i vers le sommet j.

Exemple :

Vidéo https://youtu.be/yRBCx3uxN9A

La matrice d'adjacence associée au graphe ci-contre est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

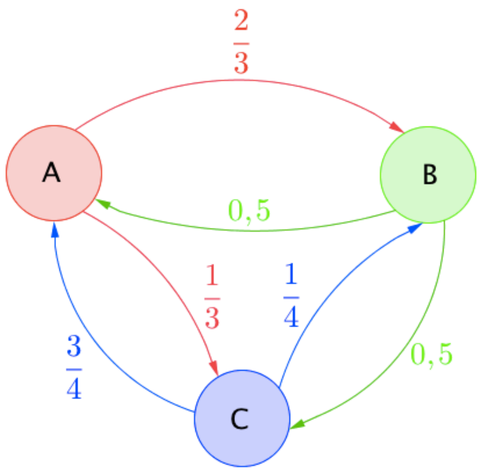


II. Chaîne de Markov

1) Définition

Dans une équipe de football, on étudie les passes que se font trois attaquants A, B et C.

Les probabilités qu'un attaquant passe le ballon à un autre sont schématisées sur le graphe orienté et pondéré suivant. Chaque passe de ballon correspond à une nouvelle expérience aléatoire dont les issues sont A, B ou C (un des trois attaquants est susceptible de recevoir le ballon).



Par exemple, la probabilité que l'attaquant A passe le ballon à l'attaquant B est égale à $\frac{2}{3}$.

Les poids des arcs sont alors des probabilités.

Un tel schéma est appelé un **graphe probabiliste**.

Définition : Un **graphe probabiliste** est un graphe orienté et pondéré possédant au plus un arc entre deux sommets et dont la somme des poids des arcs issus d'un même sommet est égale à 1.

Par exemple, la somme des poids issus de A est égal à $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

2) Marche aléatoire

On considère la variable aléatoire X_n prenant les valeurs A, B ou C à l'étape n.
A, B ou C s'appelle les **états** de X_n.
Par exemple, $X_3 = B$ signifie que l'attaquant B possède le ballon après la 3e passe.
La suite de variables aléatoires (X_n) est appelée **marche aléatoire** ou **chaîne de Markov** sur l'ensemble des issues $\{A ; B ; C\}$.

Dans une chaîne de Markov, l'état du processus à l'étape $n+1$ ne dépend que de celui à l'état n, mais non de ses états antérieurs. Ainsi, la probabilité que l'attaquant C possède le ballon ne dépend que de la position précédente du ballon (en A ou en B) mais non de ses positions antérieures.

3) Probabilité de transition

On considère la loi de probabilité de X_n, appelée **probabilité de transition**, qui donne la probabilité qu'un attaquant possède le ballon à l'étape n (n-ième passe).
On note par exemple $P_{X_n=A}(X_{n+1}=C)=\frac{1}{3}$: la probabilité que le ballon se trouve chez l'attaquant C après la $(n+1)$-ième passe sachant que c'est l'attaquant A qui envoie le ballon. Il s'agit d'une probabilité conditionnelle.
Cette probabilité ne dépend pas de n.

4) Matrice de transition

Définition : La **matrice de transition** d'une chaîne de Markov est la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient p_{ij} situé sur la ligne i et la colonne j est la probabilité de transition portée par l'arc reliant le sommet i vers le sommet j s'il existe et 0 dans le cas contraire.

Vidéo https://youtu.be/KRi0C_zOsHs

Dans l'exemple, la matrice de transition est :

$$P=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \leftarrow Transition\ du\ sommet\ A\ vers\ les\ autres\ sommets \\ \leftarrow Transition\ du\ sommet\ B\ vers\ les\ autres\ sommets \\ \leftarrow Transition\ du\ sommet\ C\ vers\ les\ autres\ sommets \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Vers\ A \uparrow & & \uparrow Vers\ C \\ & \uparrow Vers\ B & \end{array}$$

On trouve par exemple à l'intersection de la première ligne et de la deuxième colonne la probabilité que le ballon arrive chez l'attaquant B alors qu'il se trouvait chez l'attaquant A.

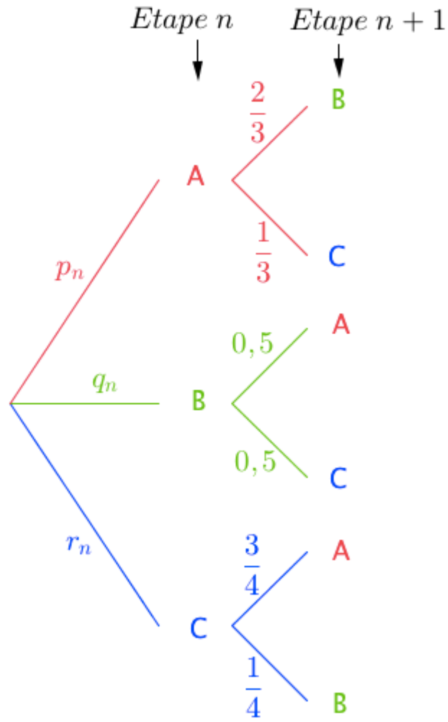
Remarques :
- Le coefficient p_{11} de la matrice P est nul car la probabilité que l'attaquant A garde le ballon est nulle. Il en est de même pour les coefficients p_{22} et p_{33}.
- La somme des coefficients d'une même ligne d'une matrice de transition est égale à 1.

Définition : L'**état probabiliste après n étapes** de la chaîne de Markov est la matrice ligne dont les coefficients sont les probabilités d'arrivée en chaque sommet après n étapes.

Exemple : Dans l'exemple des passeurs au football, la matrice ligne des états après la 3e étape donnerait les probabilités que le ballon se trouve chez l'attaquant A, chez l'attaquant B et chez l'attaquant C après 3 passes.

L'arbre de probabilité ci-contre permet de résumer les probabilités de transition de l'étape n à l'étape $n+1$.

On note p_n, q_n et r_n les probabilités que le ballon se trouve respectivement chez l'attaquant A, chez le B et chez le C après la n-ième passe.



A l'aide de la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{cases} p_{n+1} = 0{,}5q_n + \frac{3}{4}r_n \\ q_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{4}r_n \\ r_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + 0{,}5q_n \end{cases}$$

On note $\pi_n = (p_n \quad q_n \quad r_n)$ la matrice ligne des états de la chaîne de Markov après n étapes.
On a alors : $\pi_{n+1} = \pi_n \times P$.

Propriété : On considère une chaîne de Markov de matrice de transition P et dont la matrice ligne des états à l'étape n est π_n.
Pour tout entier naturel n, on a : $\pi_{n+1} = \pi_n \times P$ et $\pi_n = \pi_0 \times P^n$ où π_0 est l'état initial.

Démonstration au programme :

- On note :

- $\pi_n = (p_n \quad q_n \quad r_n)$ la matrice ligne des états de la chaîne de Markov après n étapes.
- A, B et C les états de X_n.

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(X_{n+1} = A) \\ &= P_{X_n=A}(X_{n+1} = A)\,P(X_n = A) + P_{X_n=B}(X_{n+1} = A)\,P(X_n = B) + P_{X_n=C}(X_{n+1} = A)\,P(X_n = C), \end{aligned}$$

selon la formule des probabilités totales.
Soit : $p_{n+1} = P_{X_n=A}(X_{n+1} = A)\,p_n + P_{X_n=B}(X_{n+1} = A)\,q_n + P_{X_n=C}(X_{n+1} = A)r_n$.
On reconnait le premier coefficient du produit $\pi_n \times P$.
On prouve de même que q_{n+1} et r_{n+1} sont respectivement le deuxième et troisième coefficient du produit $\pi_n \times P$.

- La démonstration de l'expression explicite $\pi_n = \pi_0 \times P^n$ est semblable à celle faites dans le cadre des suites numériques.

Exemple :

Vidéo https://youtu.be/gxrgpotHfnE

Dans l'exemple précédent, on suppose l'attaquant A possède le ballon à l'étape 0.
La matrice ligne des états après la 3e étape est égale à : $\pi_3 = \pi_0 \times P^3$.

On a : $\pi_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$ car le ballon part de A.
Avec la calculatrice, on obtient :

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{17}{36} & \frac{17}{72} \\ \frac{17}{48} & \frac{7}{24} & \frac{17}{48} \\ \frac{17}{32} & \frac{17}{96} & \frac{7}{24} \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\pi_3 = \pi_0 \times P^3 = (1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{17}{36} & \frac{17}{72} \\ \frac{17}{48} & \frac{7}{24} & \frac{17}{48} \\ \frac{17}{32} & \frac{17}{96} & \frac{7}{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{17}{36} & \frac{17}{72} \end{pmatrix}$$

Ainsi par exemple, la probabilité que l'attaquant C possède le ballon après la 3e passe est égale à $\frac{17}{72} \approx 0{,}24$.

IV. Distribution invariante d'une chaîne de Markov

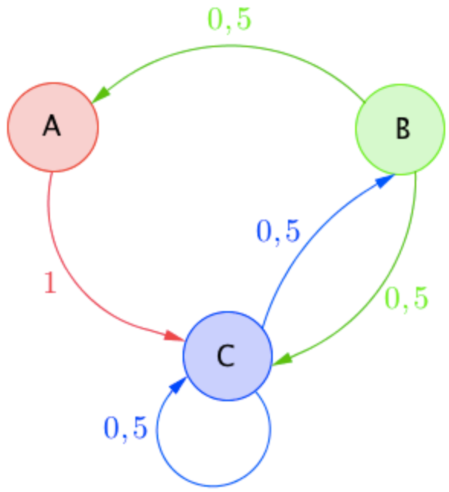
1) Chaîne de Markov convergente

Définition : On dit qu'une **chaîne de Markov de matrice de transition P est convergente** si la suite des matrices lignes (π_n) des états de la chaîne de Markov converge.

Définition : Si la suite (π_n) des états d'une chaîne de Markov convergente vérifie $\pi_{n+1} = \pi_n \times P$ alors la limite π de cette suite définit un **état stable** solution de l'équation $\pi = \pi P$.

Méthode : Étudier une distribution invariante d'une chaîne de Markov à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel

On considère la chaîne de Markov sur le graphe ci-contre où l'on part de A.
A l'aide de la calculatrice, déterminer l'état stable de cette chaîne de Markov. On admet que la chaîne de Markov est convergente (distribution invariante).



La matrice de transition est $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.
Pour tout entier naturel n, on a : $\pi_{n+1} = \pi_n \times P$, où (π_n) est la suite des matrices lignes des états de la chaîne de Markov.
On a donc : $\pi_n = \pi_0 \times P^n$ avec $\pi_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$ car on part de A.
A l'aide de la calculatrice, calculons par exemple π_{10} :

$$[1 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}^{10}$$
$$[0.142578 \quad 0.285156 \quad 0.572266]$$

On peut effectuer les calculs pour des puissances de P de plus en plus grandes. On constate que l'état stable semble être la matrice colonne :

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

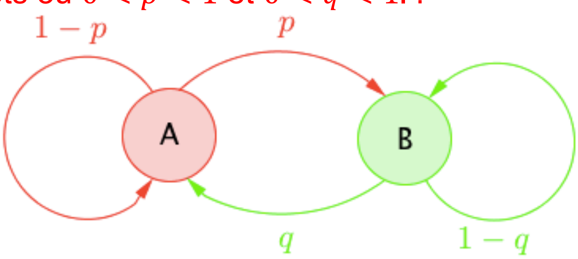
L'état stable P vérifie l'équation $\pi = \pi P$, en effet :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

Remarque :
Cette méthode ne prouve pas que la chaîne de Markov est convergente.
En supposant qu'elle l'est, elle permet seulement de déterminer l'état stable.

2) Cas d'un graphe à deux sommets

Propriété : On considère une chaîne de Markov de matrice de transition P sur un graphe à deux sommets où $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$. :



Alors on a : $P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$. Et la suite des matrices lignes (π_n) des états de la chaîne de Markov converge vers un état stable π tel que $\pi = \pi P$.
π ne dépend pas de l'état initial π_0.

Démonstration :
Pour tout entier naturel n, on note $\pi_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ avec $p_n + q_n = 1$.
Comme $\pi_{n+1} = \pi_n \times P$, on a :

$$p_{n+1} = p_n(1-p) + q_n \times q = p_n(1-p) + (1-p_n) \times q = p_n(1-p-q) + q$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = p_n - \frac{q}{p+q}$ et on a :

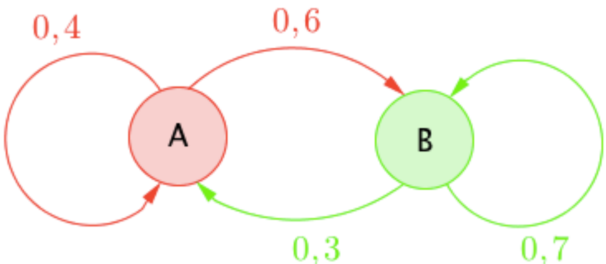
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{q}{p+q} \\ &= p_n(1-p-q) + q - \frac{q}{p+q} \\ &= p_n(1-p-q) - \frac{q(1-p-q)}{p+q} \\ &= (1-p-q)\left(p_n - \frac{q}{p+q}\right) \\ &= (1-p-q)u_n \end{aligned}$$

(u_n) est donc une suite géométrique de raison $1-p-q$.
Comme $0 < p+q < 2$, on a $|1-p-q| < 1$ et donc (u_n) converge vers 0.
D'où (p_n) converge vers $\frac{q}{p+q}$.
Comme $q_n = 1 - p_n$, (q_n) converge vers $\frac{p}{p+q}$.
Les limites de (p_n) et (q_n) ne dépendent donc pas de l'état initial.

Méthode : Étudier une distribution invariante d'une chaîne de Markov sur un graphe à deux sommets

Vidéo https://youtu.be/PS756B-M0Dw

On considère la chaîne de Markov sur le graphe ci-dessous :



Étudier la convergence de la chaîne de Markov.

La matrice de transition est $P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$.
Pour tout entier naturel n, on a : $\pi_{n+1} = \pi_n \times P$ où (π_n) est la suite des matrices lignes des états de la chaîne de Markov.
L'état stable $\pi = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}$ vérifie l'équation $\pi = \pi P$, soit :

$$\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a le système : $\begin{cases} p = 0,4p + 0,3q \\ q = 0,6p + 0,7q \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}6p = 0{,}3q \\ 0{,}3q = 0{,}6p \end{cases}$

$\Leftrightarrow q = 2p$

Comme $p + q = 1$, on a $1 - p = 2p$ et donc $p = \frac{1}{3}$ et donc $q = \frac{2}{3}$.
L'état stable du graphe est donc :

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Cela signifie que, quel que soit l'état initial (départ de A ou de B), les probabilités d'être en A et en B tendent respectivement vers $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$.