

MATRICES – Chapitre 1/2



Le mot « matrice » vient du latin « mater » (mère). Comme on enregistrait les enfants à la naissance dans des registres, le mot désigna ces registres. Cela explique les mots « matricule » ou « immatriculation ».

Avec les mathématiciens Augustin Louis Cauchy (ci-contre) et Arthur Cayley, vers 1845, le mot prend naturellement le sens mathématique qu'on lui connaît aujourd'hui.

Partie 1 : Généralités sur les matrices

Définition : Une **matrice** de taille $m \times n$ est un tableau de nombres formé de m lignes et n colonnes.

Une telle matrice s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Les nombres a_{ij} sont appelés les **coefficients** de la matrice.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille 2×3 .

Définition : Une matrice de taille $n \times n$ est appelée une **matrice carrée** de taille n .

Exemple : $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de taille 2.

Définitions : Une matrice de taille $n \times 1$ est appelée une **matrice colonne** (à n lignes).
Une matrice de taille $1 \times n$ est appelée une **matrice ligne** (à n colonnes).

Exemple : - $(1 \ 3 \ 1)$ est une matrice ligne de dimension 1×3 .

- Les coordonnées d'un vecteur du plan est une matrice colonne de dimension 2×1 .

Propriété : Deux matrices sont égales si, et seulement si, elles ont la même taille et ont les coefficients égaux placés aux mêmes positions.

Partie 2 : Opérations sur les matrices

1) Somme de matrices

Définition : Soit A et B deux matrices de même taille.

La **somme** de A et B est la matrice, notée $A + B$, dont les coefficients sont obtenus en additionnant deux à deux des coefficients qui ont la même position dans A et B .

Exemple :

 Vidéo https://youtu.be/MMBfOom_mac

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix} \text{ alors } C = A + B = \begin{pmatrix} 2+5 & 3-3 \\ 4-3 & -1+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Remarque :

Cette définition montre qu'il n'est possible d'additionner que des matrices **de même taille**.

Propriétés : Soit A , B et C trois matrices de même taille.

a) Commutativité : $A + B = B + A$

b) Associativité : $(A + B) + C = A + (B + C)$

2) Produit d'une matrice par un réel

Définition : Soit A une matrice et k un nombre réel.

La **produit de A par le réel k** est la matrice, notée kA , dont les coefficients sont obtenus en multipliant tous les coefficients de A par k .

Exemple :

 Vidéo https://youtu.be/B3NAaW1Ap_I

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5,5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \text{ alors } B = 2A = \begin{pmatrix} 2 \times (-2) & 2 \times 5,5 \\ 2 \times 2 & 2 \times (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Propriétés : Soit A et B deux matrices de même taille et deux réels k et k' .

a) $(k + k')A = kA + k'A$ b) $k(A + B) = kA + kB$ c) $(kk')A = k(k'A)$

3) Produit d'une matrice carrée par une matrice colonne

Définition : Soit A une matrice carrée de taille n et B une matrice colonne à n lignes telles que :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Le **produit de la matrice carrée A par la matrice colonne B** est la matrice colonne à n lignes, notée $A \times B$ et égale à :

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11} \times b_1 + a_{12} \times b_2 + \cdots + a_{1n} \times b_n \\ a_{21} \times b_1 + a_{22} \times b_2 + \cdots + a_{2n} \times b_n \\ \vdots \\ a_{n1} \times b_1 + a_{n2} \times b_2 + \cdots + a_{nn} \times b_n \end{pmatrix}$$

Exemple :

 Vidéo <https://youtu.be/nW8XRIhlq0Q>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ alors } A \times B = \begin{pmatrix} 2 \times 3 + 5 \times 4 \\ -3 \times 3 + 1 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ -5 \end{pmatrix}$$

4) Produit de deux matrices carrées

Définition : Soit A et B deux matrices carrées de même taille.

Le **produit de A et B** est la matrice, notée $A \times B$, dont les colonnes correspondent au produit de la matrice A par chaque colonne de la matrice B .

Exemple :

 Vidéo <https://youtu.be/ZOtgQxB5NXI>

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ alors :}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \times 3 + 3 \times 4 & -2 \times (-3) + 3 \times 1 \\ 1 \times 3 + 2 \times 4 & 1 \times (-3) + 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 11 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$B \times A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times (-2) + (-3) \times 1 & 3 \times 3 + (-3) \times 2 \\ 4 \times (-2) + 1 \times 1 & 4 \times 3 + 1 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -7 & 14 \end{pmatrix}$$

Remarque :

La multiplication de matrices n'est pas commutative :

$$A \times B \neq B \times A$$

Divertissement 🤖

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 4 \\ 9 & 9 & 9 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 44 & 32 & 30 \\ 99 & 90 & 72 & 45 \\ 22 & 20 & 16 & 10 \\ 43 & 42 & 32 & 25 \end{pmatrix}$$

Propriétés : Soit A , B et C trois matrices carrées de même taille et un réel k .

a) Associativité : $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$

b) Distributivité : $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ et $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$

c) $(kA) \times B = A \times (kB) = k(A \times B)$.

5) Puissance d'une matrice carrée

Définition : Soit A une matrice carrée et n un entier naturel.

Le carré de A est la matrice, notée A^2 , égale à $A \times A$.

Le cube de A est la matrice, notée A^3 , égale à $A \times A \times A$.

Plus généralement, la puissance n -ième de A est la matrice, notée A^n , égale au produit de n facteurs A .

Exemple :

 Vidéo <https://youtu.be/r81z2eLd07w>

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ une matrice diagonale.}$$

$$\text{Alors } A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4^2 \end{pmatrix}$$

En effet, on constate après calcul que tous les coefficients qui ne se trouvent pas sur la diagonale s'annulent et que sur la diagonale, les coefficients de A^2 sont égaux aux carrés des coefficients de A .

On peut généraliser cette règle à une puissance quelconque.

$$\text{Ainsi par exemple, } A^5 = \begin{pmatrix} 2^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1^5 & 0 \\ 0 & 0 & 4^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{pmatrix}$$

Curiosité mathématique :

$$\text{Vérifier que : } \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 33 & 44 \\ 66 & 88 \end{pmatrix} \text{ ou encore que } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 22 & 33 \\ 66 & 99 \end{pmatrix} !$$

Méthode : Utiliser la calculatrice pour effectuer des calculs matriciels

▶ Vidéo TI <https://youtu.be/8c4WDe1PSzk>

▶ Vidéo Casio <https://youtu.be/zq5OHgdTw34>

▶ Vidéo HP https://youtu.be/9a_rRHabIF8


On veut calculer le carré de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$.

Correction

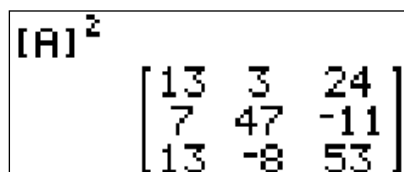
Avec une TI :

Entrer dans le mode "Matrice" (MATRIX) puis "EDIT".

Saisir la taille de la matrice puis ses coefficients.



Quittez (QUIT) puis entrer à nouveau dans le mode "Matrice" et sélectionner la matrice A et compléter la formule pour élever A au carré.



Avec une CASIO:

Entrer dans le menu "RUN.MAT" puis choisir "MAT" (Touche F1).

Choisir une matrice et saisir sa taille dans la fenêtre qui s'ouvre.

```

Dimension m×n
m : 3
n : 3
  
```

Saisir ensuite les coefficients de la matrice.

```

A
  1  2  3
  2  2  4
  3 -1  5
  
```

-5

Quitter le mode d'édition (QUIT) et taper sur la touche "Mat" puis saisir le calcul.

Mat. A²

On obtient le résultat :

```

Ans
  1  13  24
  2  7  -11
  3  13  53
  
```

Partie 3 : Matrice inverse

1) Matrice unité (ou identité)

Définition : On appelle **matrice unité** de taille n la matrice carrée formée de taille n , telle que :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : La matrice unité est une matrice carrée avec des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs.

Propriété : Pour toute matrice carrée A de taille n , on a : $A \times I_n = I_n \times A = A$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ alors :}$$

$$A \times I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 + (-2) \times 0 & 3 \times 0 + (-2) \times 1 \\ 1 \times 1 + 4 \times 0 & 1 \times 0 + 4 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = A$$

2) Matrice inverse d'une matrice carrée

Définition : Une matrice carrée A de taille n est une **matrice inversible** s'il existe une matrice B telle que $A \times B = B \times A = I_n$.
La matrice B , notée A^{-1} est appelée la **matrice inverse** de A .

Exemple :

 Vidéo <https://youtu.be/FAvptVYvfb0>

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ -0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ -0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 0,2 + (-1) \times (-0,4) & 3 \times 0,2 + (-1) \times 0,6 \\ 2 \times 0,2 + 1 \times (-0,4) & 2 \times 0,2 + 1 \times 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrices A et B sont donc inverses l'une de l'autre.

Remarque :

Toutes les matrices ne sont pas inversibles.

 Vidéo <https://youtu.be/pHlepnbQaCQ>

Propriété : La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$.

Démonstration :

$$\text{Soit } B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

$$\text{Alors } A \times B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = (ad - bc)I_2.$$

Si $ad - bc \neq 0$, on a $\frac{1}{ad-bc} A \times B = I_2$ soit $A \times \left(\frac{1}{ad-bc} B\right) = I_2$ donc A est inversible.

Si $ad - bc = 0$, alors $A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc A n'est pas inversible. Car si A était inversible d'inverse la matrice C , on aurait $C \times A \times B = I_2 \times B = B$ et $C \times A \times B = C \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Et donc $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ce qui est impossible.

Méthode : Calculer l'inverse d'une matrice carrée de taille 2

 Vidéo <https://youtu.be/4QMzwWY6T7g>

Calculer l'inverse de la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Correction

On a : $C \times C^{-1} = I_2$ soit $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc : $\begin{pmatrix} 2c & 2d \\ a + 2c & b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Et donc : $\begin{cases} 2c = 1 \\ 2d = 0 \\ a + 2c = 0 \\ b + 2d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2} \\ d = 0 \\ a + 2 \times \frac{1}{2} = 0 \\ b + 2 \times 0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2} \\ d = 0 \\ a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$

D'où $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

On peut vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice :

Il est possible de faire une saisie en ligne sans passer par le menu "Matrice".

$$\left[\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right]^{-1}$$

On obtient l'affichage suivant et le résultat :

$$\left[\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \right] \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ .5 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriété : Soit A une matrice carrée inversible de taille n , et M et N deux matrices carrées ou colonnes de taille n . On a :

$$A \times M = N, \text{ si et seulement si, } M = A^{-1} \times N$$

Démonstration :

$$A \times M = N \Leftrightarrow A^{-1} \times (A \times M) = A^{-1} \times N$$

$$\text{Comme } A^{-1} \times (A \times M) = (A^{-1} \times A) \times M = I_n \times M = M, \text{ on a :}$$

$$M = A^{-1} \times N$$

© Copyright

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales