

FONCTIONS EXPONENTIELLES

Partie 1 : Définition et propriété

1) Définition

On considère la suite géométrique de raison a définie par $u_n = a^n$.

Elle est définie pour tout entier naturel n .

En prolongeant son ensemble de définition pour tout réel positif, on définit la fonction exponentielle de base a .

Ainsi par exemple :

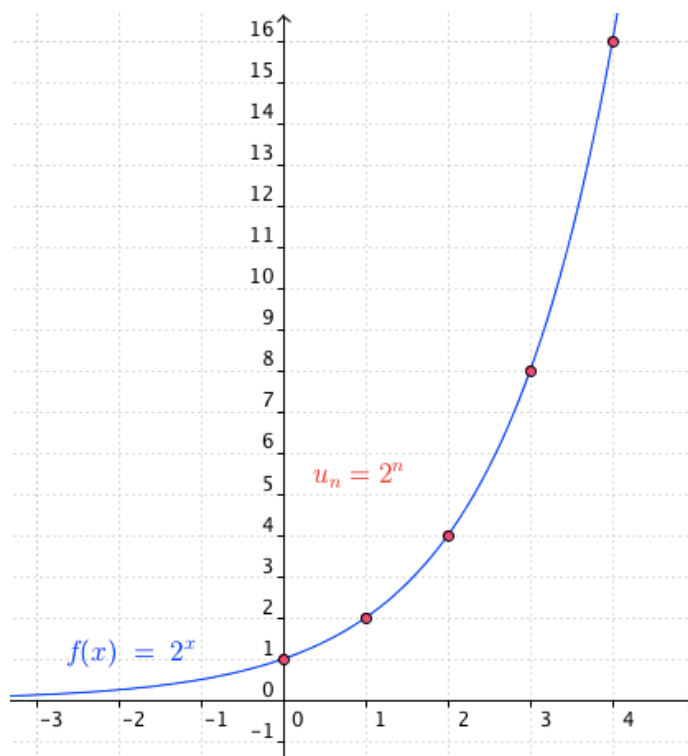
Pour une suite géométrique de raison $a = 2$ et de premier terme 1, on a par exemple : $u_4 = 2^4$.

Pour la fonction correspondante, on a :

$f(4) = 2^4$ mais on a également :

$f(1,3) = 2^{1,3}$.

Et de façon générale, $f(x) = 2^x$ pour tout réel x positif.



La fonction f est appelée fonction exponentielle de base 2.

Propriété : $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

L'ensemble de définition des fonctions exponentielles peut ainsi être étendu aux valeurs de x négatives.

Définition : La fonction $x \mapsto a^x$ définie sur \mathbb{R} , avec $a > 0$, s'appelle **fonction exponentielle de base a** .

Exemple :

La fonction exponentielle de base 1,2 est définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto 1,2^x$.

Remarque : Avec la calculatrice, il est possible de calculer des valeurs d'une fonction exponentielle.

$$\begin{array}{r}
 1.2^5 \\
 1.2^{2.3} \\
 1.2^{2.3}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 2.48832 \\
 .6944444444 \\
 1.5208515625
 \end{array}$$

Propriété : La fonction exponentielle de base a est strictement positive sur \mathbb{R} .

2) PropriétésPropriétés :

a) $a^0 = 1$ et $a^1 = a$ b) $a^{x+y} = a^x \times a^y$

c) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$ d) $(a^x)^n = a^{nx}$, avec n un entier relatif.

Méthode : Simplifier une expression

 Vidéo <https://youtu.be/PHTOZid0kzM>

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = 4^{-3} \times 4^{-5} \qquad B = \frac{3^3 \times 3^{-2,5}}{9^5}$$

$$C = (4,8^{-2,1})^3 \times 4,8^{6,2}$$

Correction

$$A = 4^{-3} \times 4^{-5} \qquad B = \frac{3^3 \times 3^{-2,5}}{9^5}$$

$$C = (4,8^{-2,1})^3 \times 4,8^{6,2}$$

$$A = 4^{-3+(-5)} \qquad B = \frac{3^3 \times 3^{-2,5}}{(3^2)^5}$$

$$C = 4,8^{-2,1 \times 3} \times 4,8^{6,2}$$

$$A = 4^{-8} \qquad B = \frac{3^{3-2,5}}{3^{2 \times 5}}$$

$$C = 4,8^{-6,3} \times 4,8^{6,2}$$

$$B = \frac{3^{0,5}}{3^{10}}$$

$$C = 4,8^{-6,3+6,2}$$

$$B = 3^{0,5-10}$$

$$C = 4,8^{-0,1}$$

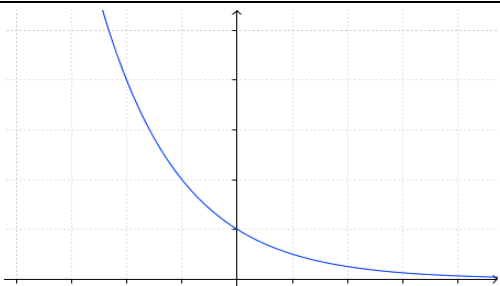
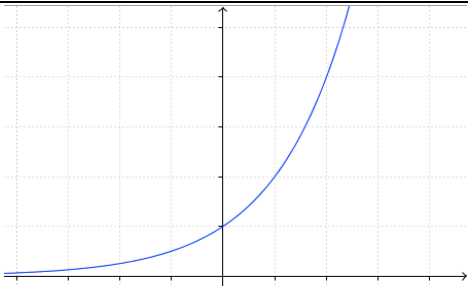
$$B = 3^{-9,5}$$

$$C = \frac{1}{4,8^{0,1}}$$

$$B = \frac{1}{3^{9,5}}$$

Partie 2 : Variations de la fonction exponentielle

 Vidéo https://youtu.be/YQoR7CFM_1U

$0 < a < 1$	$a > 1$
$x \mapsto a^x$ est décroissante sur \mathbb{R}	$x \mapsto a^x$ est croissante sur \mathbb{R}
	

Remarques :

- On retrouve les résultats établis pour la variation des suites géométriques.
- Si $a = 1$ alors la fonction exponentielle est constante. En effet, dans ce cas, $a^x = 1^x = 1$
- Quel que soit a , la fonction exponentielle passe par le point $(0 ; 1)$. En effet, $a^0 = 1$.

Méthode : Utiliser une fonction exponentielle

▶ Vidéo <https://youtu.be/maK64g-y3gA>

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0 ; 10]$ par : $f(x) = 50000 \times 1,15^x$.

- À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.
- Déterminer les variations de f sur $[0 ; 10]$.
- À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a doublé ?

Correction

$$\begin{aligned} \text{a) } f(3) &= 50000 \times 1,15^3 \approx 76000 \\ f(5,5) &= 50000 \times 1,15^{5,5} \approx 108000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &50000 * 1.15^3 \\ &76043.75 \\ &50000 * 1.15^{5.5} \\ &107847.0143 \end{aligned}$$

b) $a = 1,15 > 1$ donc la fonction $x \mapsto 1,15^x$ est strictement croissante sur $[0 ; 10]$.
Il en est de même pour la fonction f .

c) Le nombre de bactéries a doublé à partir de 100000 bactéries, soit au bout d'environ 5h.

X	Y1
4.91	99311
4.92	99450
4.93	99589
4.94	99728
4.95	99868
4.96	100007
4.97	100147

X=4.96

Partie 3 : Taux d'évolution moyenPropriété :

$$\text{Si } x^n = a \text{ alors } x = a^{\frac{1}{n}}$$

Méthode : Calculer un taux d'évolution moyen

 Vidéo <https://youtu.be/8oclhl-SFuQ>

Entre 2012 et 2015, le prix du gaz a augmenté de 25 %. Calculer le taux d'évolution moyen annuel.

Correction

On note t le taux d'évolution moyen annuel.

Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation **sur un an** est égal à :

$$1 + \frac{t}{100}$$

Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation **sur trois ans** (de 2012 à 2015) est égal à :

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right) \times \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times \left(1 + \frac{t}{100}\right) = \left(1 + \frac{t}{100}\right)^3$$

Or, sur trois années, le prix a augmenté de 25 % donc ce coefficient multiplicateur est également égal à : 1,25.

On a donc :

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^3 = 1,25$$

$$1 + \frac{t}{100} = 1,25^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{t}{100} = 1,25^{\frac{1}{3}} - 1$$

$$t = 100 \times \left(1,25^{\frac{1}{3}} - 1\right)$$

$$t \approx 7,72 \%$$

Le taux d'évolution moyen annuel est environ égal 7,72%.

Remarque : $a^{\frac{1}{n}}$ est appelé la **racine n-ième** de a .

On peut également noter $\sqrt[n]{a}$.

On a par exemple : Si $x^2 = a$ alors $x = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$!



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales