FONCTIONS POLYNÔMES DE DEGRÉ 2

Chapitre 1/2

Partie 1 : Définition

Exemples et contre-exemples :

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 3x^2 - 7x + 3 \\ g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 5x + \dfrac{3}{5} \\ h(x) = 4 - 2x^2 \\ k(x) = (x - 4)(5 - 2x) \end{array}\right\}$$ sont des fonctions polynômes de degré 2.

$m(x) = 5x - 3$ est une fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).

$n(x) = 5x^4 - 7x^3 + 3x - 8$ est une fonction polynôme de degré 4.

Définition : On appelle **fonction polynôme de degré 2** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où les coefficients a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

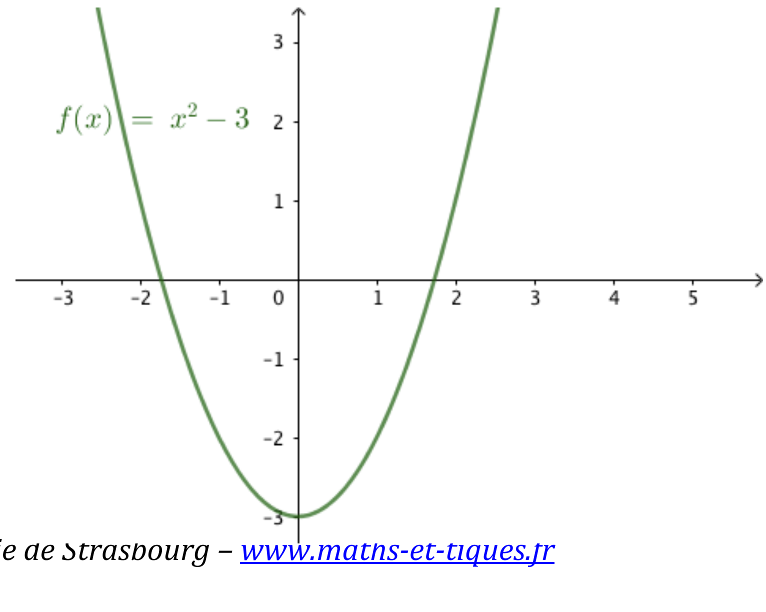
Remarque :
Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction polynôme du second degré ou plus simplement « trinôme ».

Partie 2 : Représentation graphique

1) La parabole

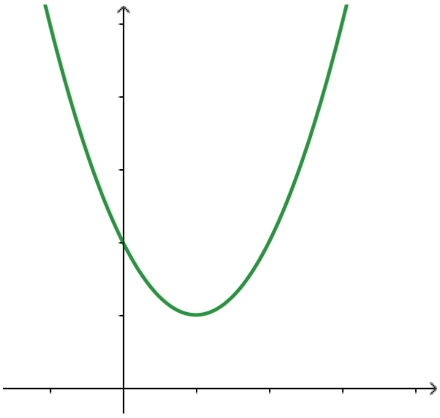
Exemple :

La représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 s'appelle une **parabole**.



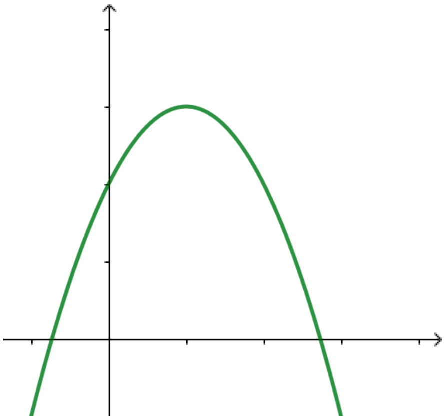
Propriétés :
Soit f une fonction polynôme du second degré, telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Si a est positif, f est d'abord décroissante, puis croissante : « 😊 ».
- Si a est négatif, f est d'abord croissante, puis décroissante : « ☹ ».

$a > 0$

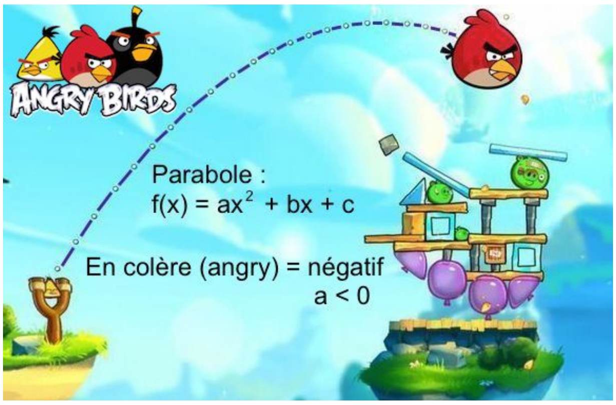


Les branches de la parabole sont tirées vers le haut.

$a < 0$



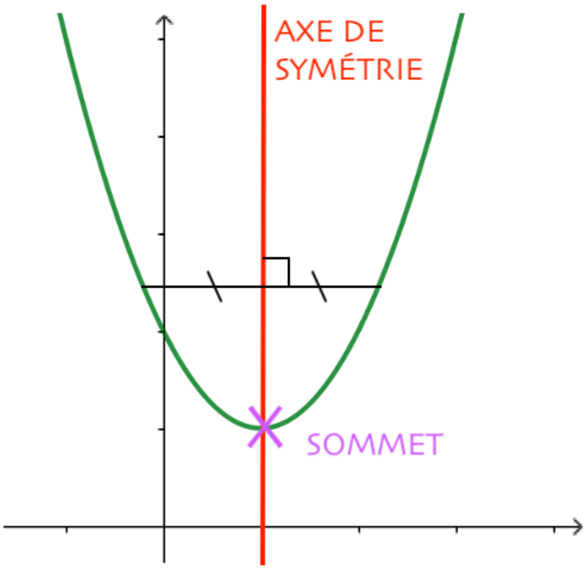
Les branches de la parabole sont tirées vers le bas.



2) Axe de symétrie et sommet de la courbe

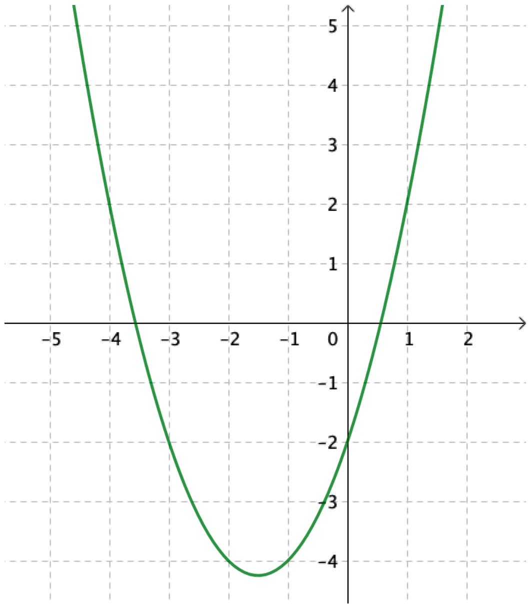
La courbe d'une fonction polynôme du second degré possède un **axe de symétrie**.

Le sommet de la courbe se trouve à l'intersection de l'axe de symétrie avec la courbe.



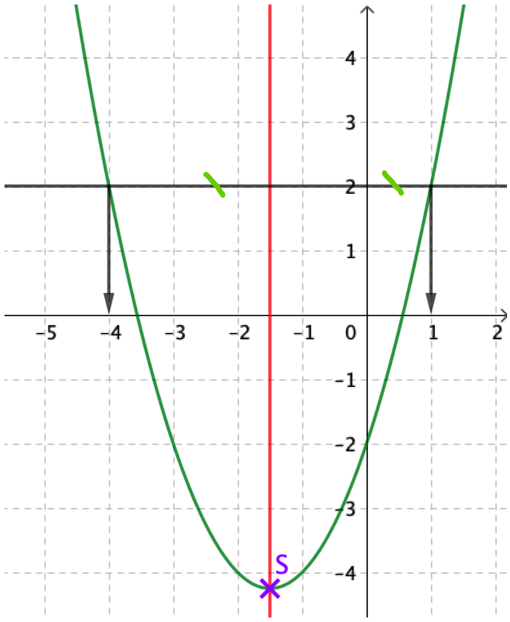
Méthode : Déterminer les éléments caractéristiques d'une parabole

On a représenté la fonction polynôme du second degré f définie par $f(x) = x^2 + 3x - 2$.



1) Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = 2$.
2) Tracer l'axe de symétrie de la courbe.
3) Donner les coordonnées du sommet de la courbe.

Correction



1) Les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont $x = -4$ et $x = 1$.

2) L'axe de symétrie de la courbe est la droite verticale qui coupe l'axe des abscisses en $-1{,}5$.
En effet : $(-4 + 1) : 2 = -1{,}5$.

3) Le sommet est à l'intersection de l'axe de symétrie avec la courbe. Donc son abscisse est $-1{,}5$.
Son ordonnée est :
$f(-1{,}5) = (-1{,}5)^2 + 3 \times (-1{,}5) - 2 = -4{,}25$.
Les coordonnées du sommet sont donc :
$(-1{,}5\ ;\ -4{,}25)$.

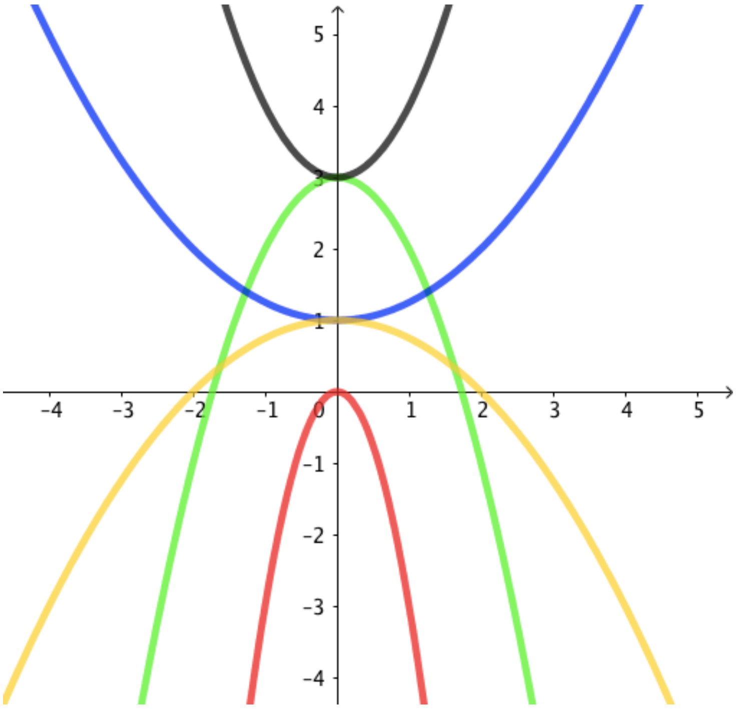
Propriété : L'axe de symétrie d'une courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + c$ est l'axe des ordonnées et son sommet est le point de coordonnées (0 ; c).

Méthode : Associer une fonction du second degré à sa représentation graphique

Vidéo https://youtu.be/hRadBik3zRk

Associer chaque fonction à sa représentation graphique :

$$f(x) = -x^2 + 3$$
$$g(x) = -3x^2$$
$$h(x) = x^2 + 3$$
$$p(x) = \frac{x^2}{4} + 1$$
$$q(x) = -\frac{x^2}{4} + 1$$



Correction

- La **parabole rouge** est la seule dont le sommet est l'origine (0 ; **0**). Donc $c = \mathbf{0}$ dans l'écriture de la fonction $x \longmapsto ax^2 + c$.
Ainsi, la **parabole rouge** représente la fonction g définie par $g(x) = -3x^2$.

- La **parabole verte** et la **parabole noire** ont toutes les deux pour sommet le point de coordonnées (0 ; **3**).
Donc $c = \mathbf{3}$ dans l'écriture de la fonction $x \longmapsto ax^2 + c$.
Ainsi, il faut choisir parmi les expressions : $f(x) = -x^2 + 3$ et $h(x) = x^2 + 3$.
 - Les branches de la **parabole noire** sont tournées vers le haut donc $a > 0$ dans l'écriture de la fonction $x \longmapsto ax^2 + c$.
Ainsi, la **parabole noire** représente la fonction h pour qui $a = 1 > 0$.
 - Les branches de la **parabole verte** sont tournées vers le bas donc $a < 0$.
Ainsi, la **parabole verte** représente la fonction f pour qui $a = -1 < 0$.

- La **parabole bleue** et la **parabole jaune** ont toutes les deux pour sommet le point de coordonnées (0 ; **1**).
Donc $c = \mathbf{1}$ dans l'écriture de la fonction $x \longmapsto ax^2 + c$.
Ainsi, il faut choisir parmi les expressions : $p(x) = \frac{x^2}{4} + 1$ et $q(x) = -\frac{x^2}{4} + 1$.
 - Les branches de la **parabole bleue** sont tournées vers le haut donc $a > 0$ dans l'écriture de la fonction $x \longmapsto ax^2 + c$.
Ainsi, la **parabole bleue** représente la fonction p pour qui $a = \frac{1}{4} > 0$.
 - Les branches de la **parabole jaune** sont tournées vers le bas donc $a < 0$.
Ainsi, la **parabole jaune** représente la fonction q pour qui $a = -\frac{1}{4} < 0$.

3) Tableau de variations

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Si $a > 0$:

x	$-\infty$		p		$+\infty$
$f(x)$		↘	q	↗	

Si $a < 0$:

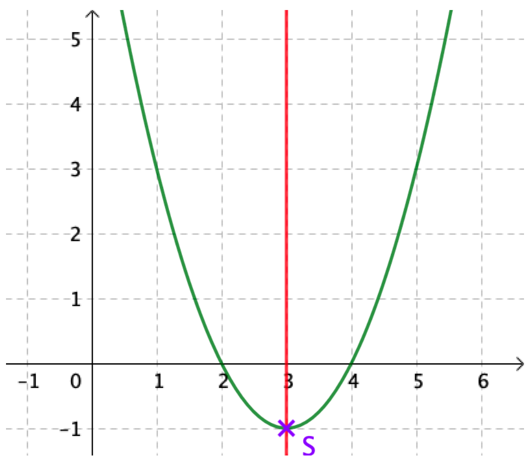
x	$-\infty$		p		$+\infty$
$f(x)$		↗	q	↘	

L'axe de symétrie de la courbe est la droite verticale qui coupe l'axe des abscisses en p.
Son sommet est le point de coordonnées $(p\,;q)$.

Exemple :

On donne le tableau de variations de la fonction polynôme du second degré f.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		↘	-1	↗	



Le point de coordonnées (3 ; -1) est le sommet S de la courbe.
L'axe de symétrie est la droite verticale qui coupe l'axe des abscisses en 3.