SUITES ARITHMÉTIQUES

Partie 1 : Relation de récurrence

Exemples :
a) Considérons la suite (u_n) où l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant 5.
Si le premier terme est égal à 3, les termes suivants sont :
$u_0 = 3$,
$u_1 = 8$,
$u_2 = 13$,
$u_3 = 18$.
Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3.
La suite est donc définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$

b) Soit la suite numérique (v_n) de premier terme 5 et de raison -2.
Les premiers termes successifs sont :
$v_0 = 5$,
$v_1 = 5 - 2 = 3$,
$v_2 = 3 - 2 = 1$,
$v_3 = 1 - 2 = -1$.
La suite est donc définie par : $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = v_n - 2 \end{cases}$

Définition : Une suite (u_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre r est appelé **raison** de la suite.

Partie 2 : Forme explicite en fonction de n

Propriété : Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, on a :
$u_n = u_0 + nr$

Méthode : Déterminer une expression en fonction de n d'une suite arithmétique

Vidéo https://youtu.be/6O0KhPMHvBA

a) Déterminer l'expression, en fonction de n, de la suite arithmétique définie par :
$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$
b) Déterminer l'expression, en fonction de n, de la suite arithmétique définie par :
$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$

Correction
a) On a : $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = u_n - 4$
On passe d'un terme au suivant en ajoutant -4, et donc la raison r est égal à -4 et le premier terme u_0 est égal à 7.
Ainsi :
$u_n = u_0 + nr$
$u_n = 7 + n \times (-4)$
$u_n = 7 - 4n$

b) On a : $u_1 = 5$ et $u_{n+1} = u_n + 3$
On passe d'un terme au suivant en ajoutant 3, donc la raison r est égale à 3.
Ici, le terme u_0 n'est pas donné mais on peut le calculer.
Pour passer de u_1 à u_0, on retire 3 (« marche arrière ») donc $u_0 = u_1 - 3 = 2$.
Ainsi :
$u_n = u_0 + nr$
$u_n = 2 + 3n$

⚠ À noter : Il peut être pratique d'appliquer directement la formule : $u_n = u_1 + (n-1)r$

Méthode : Exprimer une suite arithmétique en fonction de n

Vidéo https://youtu.be/6O0KhPMHvBA

Pour préparer une course, un athlète décide de s'entraîner de façon progressive.
Il commence son entraînement au « jour 0 » par un petit footing d'une longueur de 3000 m.
Au « jour 1 », il court 3150 m. Au « jour 2 », il court 3300 m puis ainsi de suite en parcourant chaque jour 150 m de plus que la veille.
On note u_n la distance parcourue au « jour n » d'entraînement.

a) Calculer u_3 et u_4.
b) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? On donnera son premier terme et sa raison.
c) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
d) Exprimer u_n en fonction de n.
e) À partir de quelle valeur de n, a-t-on $u_n > 5000$. Interpréter le résultat.

Correction
a) u_0 = 3000
u_1 = 3150
u_2 = 3300
u_3 = 3450
u_4 = 3600

b) (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 = 3000 et de raison r = 150.
On parle ici de **croissance linéaire**.

c) $u_{n+1} = u_n + 150$

d) Après 1 jour, il parcourt : $u_1 = 3000 + 150 \times 1$

Après 2 jours, il parcourt : $u_2 = 3000 + 150 \times 2$
Après 3 jours, il parcourt : $u_3 = 3000 + 150 \times 3$
De manière générale, après n jours, il parcourt : $u_n = 3000 + 150n$.

e) $u_n > 5000$
$3000 + 150n > 5000$
$150n > 5000 - 3000$
$150n > 2000$
$n > 2000 : 150 \approx 13{,}3$
Donc $n = 14$, car n est un entier.
A partir du 14e jour, l'athlète parcourra plus de 5000 m par jour.

Partie 3 : Variation et représentation graphique

1) Variation

Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r.
- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $r = 0$ alors la suite (u_n) est constante.
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Méthode : Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique

Vidéo https://youtu.be/R3sHNwOb02M

Étudier les variations des suites arithmétiques (u_n) et (v_n) définies par :
$a)\ u_n = 3 + 5n$
b) $\begin{cases} v_0 = -3 \\ v_{n+1} = v_n - 4 \end{cases}$

Correction

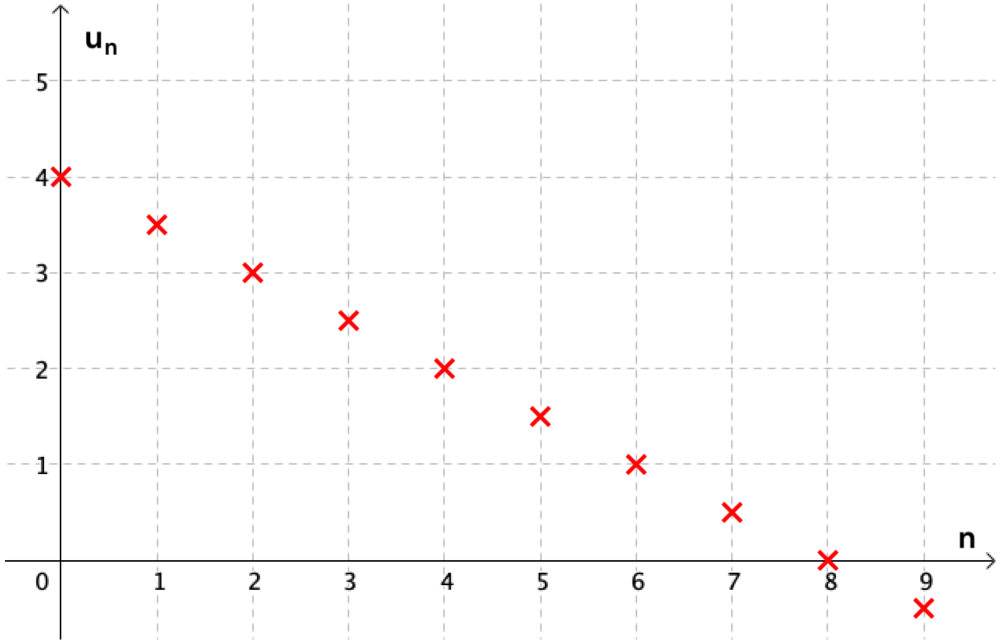
a) (u_n) est croissante car de raison positive et égale à 5.

b) On passe d'un terme au suivant en ajoutant -4. (v_n) est décroissante car de raison négative et égale à -4.

2) Représentation graphique

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Exemple :
On a représenté ci-dessous la suite de raison –0,5 et de premier terme 4.



RÉSUMÉ	(u_n) une suite arithmétique - de raison r - de premier terme u_0.	Exemple : $r = -0{,}5$ et $u_0 = 4$
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = u_n - 0{,}5$ La différence entre un terme et son précédent est égale à $-0{,}5$.
Propriété	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = 4 - 0{,}5n$
Sens De variation	Si $r > 0$: (u_n) est croissante. Si $r < 0$: (u_n) est décroissante.	$r = -0{,}5 < 0$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	Remarque : Les points de la représentation graphique sont alignés. La croissance est linéaire.