

# SUITES GÉOMÉTRIQUES

## Partie 1 : Relation de récurrence

### Exemples :

a) Considérons la suite  $(u_n)$  où l'on passe d'un terme au suivant en **multipliant par 2**.  
Si le premier terme est égal à 5, les termes suivants sont :

$$u_0 = 5,$$

$$u_1 = 10,$$

$$u_2 = 20,$$

$$u_3 = 40.$$

Une telle suite est appelée une suite géométrique de **raison 2** et de premier terme 5.

La suite est donc définie par :  $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

b) Soit la suite numérique  $(v_n)$  de premier terme 4 et de raison 0,1.

Les premiers termes successifs sont :

$$v_0 = 4$$

$$v_1 = 0,1 \times 4 = 0,4$$

$$v_2 = 0,1 \times 0,4 = 0,04$$

$$v_3 = 0,1 \times 0,04 = 0,004$$

La suite est donc définie par :  $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = 0,1 \times v_n \end{cases}$

**Définition :** Une suite  $(u_n)$  est une **suite géométrique** s'il existe un nombre réel  $q$ , strictement positif, tel que pour tout entier  $n$ , on a :  $u_{n+1} = q \times u_n$ .  
Le nombre  $q$  est appelé **raison** de la suite.

**Remarque :** Dans le cas où  $q < 0$ , la suite est également géométrique mais cette situation n'est pas au programme cette année.

### Exemple concret :

On place un capital de 500 € sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4 %.

Chaque année, le capital est donc multiplié par 1,04.

Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,04.

On a ainsi :

$$u_1 = 1,04 \times 500 = 520$$

$$u_2 = 1,04 \times 520 = 540,80$$

$$u_3 = 1,04 \times 540,80 = 562,432$$

De manière générale :  $u_{n+1} = 1,04 \times u_n$  avec  $u_0 = 500$

## Partie 2 : Forme explicite en fonction de n

Propriété :  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $u_0$ .  
Pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n = u_0 \times q^n$ .

Méthode : Déterminer une expression en fonction de  $n$  d'une suite géométrique

▶ Vidéo <https://youtu.be/WTmdtbQpa0c>

a) Déterminer l'expression en fonction de  $n$  de la suite géométrique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 4u_n \end{cases}$$

b) Déterminer l'expression en fonction de  $n$  de la suite géométrique définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$$

### Correction

a) On a :  $u_0 = 3$  et  $u_{n+1} = 4u_n$

On passe d'un terme au suivant en multipliant par 4, donc la raison  $q$  est égal à 4 et le premier terme  $u_0$  est égal à 3.

Ainsi :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

$$u_n = 3 \times 4^n$$

b) On a :  $u_1 = 5$  et  $u_{n+1} = 2u_n$

On passe d'un terme au suivant en multipliant par 2 donc la raison  $q$  est égal à 2.

Ici, le terme  $u_0$  n'est pas donné mais on peut le calculer.

Pour passer de  $u_1$  à  $u_0$ , on divise par 2 (« marche arrière ») donc :

$$u_0 = \frac{u_1}{2} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

La raison  $q$  est égal à 2 et le premier terme  $u_0$  est égal à 2,5.

Ainsi :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

$$u_n = 2,5 \times 2^n$$

⚠ À noter : Il peut être pratique d'appliquer directement la formule :  $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

## Partie 3 : Variation et représentation graphique

Propriété :  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $u_0$  strictement positif.

- Si  $q > 1$  alors la suite  $(u_n)$  est croissante.

- Si  $q = 1$  alors la suite  $(u_n)$  est constante.

- Si  $0 < q < 1$  alors la suite  $(u_n)$  est décroissante.

### Méthode : Déterminer le sens de variation d'une suite géométrique

Déterminer le sens de variation des suites géométriques  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par :

$$\text{a) } u_n = 4 \times 2^n \qquad \text{b) } \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n \end{cases}$$

#### Correction

a) La suite géométrique  $(u_n)$  définie par  $u_n = 4 \times 2^n$  est **croissante** car  $q = 2$  donc  $q > 1$

b) La suite géométrique  $(v_n)$  définie par  $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$  et  $v_0 = 2$  est **décroissante** car  $q = \frac{1}{2}$  donc  $0 < q < 1$ .

### Méthode : Étudier un problème à l'aide d'une suite géométrique

 **Vidéo** <https://youtu.be/WTmdtbQpa0c>

On place un capital de 500 € sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4 % par an.  
On note  $u_n$  la valeur du capital après  $n$  années.

- Calculer  $u_2$  et  $u_3$ .
- Quelle est la nature de la suite  $(u_n)$  ? On donnera son premier terme et sa raison.
- Exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .
- Donner la variation de la suite  $(u_n)$ .
- Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

#### Correction

a) Chaque année, le capital est multiplié par 1,04.

$$u_0 = 500$$

$$u_1 = 1,04 \times 500 = 520$$

$$u_2 = 1,04 \times 520 = 540,80$$

$$u_3 = 1,04 \times 540,80 = 562,432$$

b)  $(u_n)$  est une suite géométrique de premier terme  $u_0 = 500$  et de raison  $q = 1,04$ .  
On parle ici de **croissance exponentielle**.

$$\text{c) } u_{n+1} = 1,04 u_n$$

d)  $q = 1,04 > 1$  donc la suite  $(u_n)$  est croissante.

e) Après 1 an, le capital est égal à :  $u_1 = 1,04 \times 500$

Après 2 ans, le capital est égal à :  $u_2 = 1,04^2 \times 500$

Après 3 ans, le capital est égal à :  $u_3 = 1,04^3 \times 500$

De manière générale, après  $n$  années, le capital est :  $u_n = 1,04^n \times 500$

## Partie 4 : Comparaison de suites

### Méthode : Comparer deux suites

Une banque propose deux options de placement :

- Placement A : On dépose un capital de départ. Chaque année, la banque nous reverse 6 % du capital de départ.

- Placement B : On dépose un capital de départ. Chaque année, la banque nous reverse 4 % du capital de l'année précédente.

On suppose que le placement initial est de 200 €. L'objectif est de savoir à partir de combien d'années un placement est plus intéressant que l'autre.

On note  $u_n$  la valeur du capital après  $n$  années pour le placement A et  $v_n$  la valeur du capital après  $n$  années pour le placement B.

- 1) a) Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .  
b) Calculer  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$ .
- 2) Quelle est la nature des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ? On donnera le premier terme et la raison.
- 3) Exprimer  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ .
- 4) Déterminer le plus petit entier  $n$ , tel que  $u_n < v_n$ . Interpréter ce résultat.

### Correction

1) a) Avec le placement A, on gagne chaque année 6 % de 200 € = 12 €.

$$u_0 = 200$$

$$u_1 = 200 + 12 = 212$$

$$u_2 = 212 + 12 = 224$$

$$u_3 = 224 + 12 = 236$$

b) Avec le placement B, chaque année le capital est multiplié par 1,04.

$$v_0 = 200$$

$$v_1 = 1,04 \times 200 = 208$$

$$v_2 = 1,04 \times 208 = 216,32$$

$$v_3 = 1,04 \times 216,32 = 224,97$$

2)  $(u_n)$  est une suite arithmétique de premier terme  $u_0 = 200$  et de raison  $r = 12$ .

$(v_n)$  est une suite géométrique de premier terme  $v_0 = 200$  et de raison  $q = 1,04$ .

$$3) u_n = 200 + 12n$$

$$v_n = 200 \times 1,04^n$$

4) Saisir l'expression du terme général, comme pour une fonction :

$$Y_1 \equiv 200 + 12X$$

$$Y_2 \equiv 200 * 1.04^X$$

Paramétrer la Table avec un pas de 1 et afficher la table :

X	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>
14	368	346.34
15	380	360.19
16	392	374.6
17	404	389.58
18	416	405.16
19	428	421.37
20	440	438.22
21	452	455.75
22	464	473.98
23	476	492.94
24	488	512.66

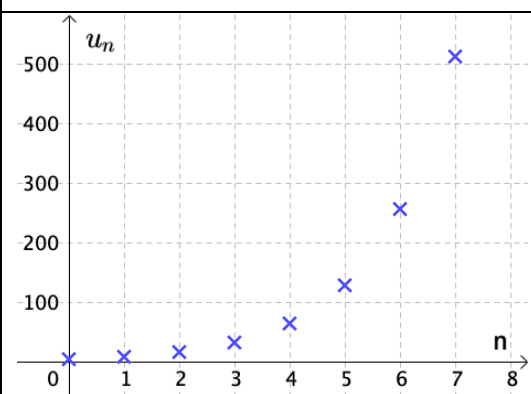
$$X=21$$

Le plus petit entier  $n$ , tel que  $u_n < v_n$  est 21.

Cela signifie qu'à partir de 21 années, le placement B devient plus rentable que le placement A.

Décibels : Téléphones VS Avion

 Vidéo <https://youtu.be/mvXGq5S0eAM>

<b>RÉSUMÉ</b>	$(u_n)$ une suite géométrique de raison $q$ positive de premier terme $u_0$ positif.	Exemple : $q = 2$ et $u_0 = 4$
Définition	$u_{n+1} = q \times u_n$	$u_{n+1} = 2 \times u_n$ Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 2.
Propriété	$u_n = u_0 \times q^n$	$u_n = 4 \times 2^n$
Sens de variation	Si $q > 1$ : $(u_n)$ est croissante. Si $0 < q < 1$ : $(u_n)$ est décroissante.	$q = 2 > 1$ La suite $(u_n)$ est croissante.
Représentation graphique	On parle de croissance exponentielle.	



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)