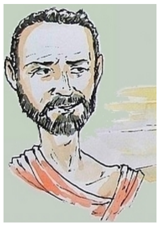
PROPORTIONNALITÉ

Tout le cours en vidéo : https://youtu.be/xzh9846HI0w



Lors de son premier voyage en Egypte, ***Thalès*** applique le théorème qui porte aujourd'hui son nom pour mesurer la hauteur de la grande pyramide de Kheops.
Citons de Thalès : *"Le rapport que j'entretiens avec mon ombre est le même que celui que la pyramide entretient avec la sienne."* Par une relation de proportionnalité, Thalès obtint la hauteur de la pyramide grâce à la longueur de son ombre.
L'idée ingénieuse de Thalès était la suivante :
" A l'instant où mon ombre sera égale à ma taille, l'ombre de la pyramide sera égale à sa hauteur."

Partie 1 : Coefficient de proportionnalité

1) Reconnaître un tableau de proportionnalité

Exemple :

Dorian pratique la course à pied et il court toujours à la même vitesse. Ses performances sont résumées dans le tableau.

$\times 2$

Distance (en km)	2	4	6
Temps (en min)	20	40	60

$\times 3$

● Quand sa distance est multipliée par 2, son temps est multiplié par 2.
Quand sa distance est multipliée par 3, son temps est multiplié par 3.
Donc la distance parcourue est proportionnelle au temps.
Ce tableau s'appelle un tableau de proportionnalité.

● On constate qu'on obtient les nombres de la deuxième ligne en multipliant les nombres de la première ligne par 10.

Distance (en km)	2	4	6
Temps (en min)	20	40	60

$\times 10$

Le nombre 10 s'appelle le coefficient de proportionnalité.

Propriété : Dans un tableau de proportionnalité, les nombres de la deuxième ligne sont obtenus en multipliant les nombres de la première ligne par un même nombre : le **coefficient de proportionnalité**.

Méthode : Reconnaître une situation de proportionnalité

Vidéo https://youtu.be/O7oU-J1OqCw

Les tableaux représentent-ils une situation de proportionnalité ?

a)

3,2	1,3	5,4
22,4	9,1	37,8

b)

0,8	1,5	1,25
2,4	4,5	3,9

Correction
Pour savoir si un tableau est un tableau de proportionnalité, on vérifie s'il existe un coefficient de proportionnalité. Pour le calculer, on divise les nombres de la deuxième ligne par les nombres de la première ligne.

a) 22,4 : 3,2 = 7
9,1 : 1,3 = 7
37,8 : 5,4 = 7
Il s'agit d'un tableau de proportionnalité.
Le coefficient de proportionnalité est 7.

b) 2,4 : 0,8 = 3
4,5 : 1,5 = 3
3,9 : 1,25 = 3,12 $\neq$ 3
Il ne s'agit pas d'un tableau de proportionnalité.

Remarque :
On peut également diviser les nombres de la première ligne par les nombres de la deuxième ligne.
On obtiendrait le coefficient de proportionnalité inverse.

2) Utiliser un tableau de proportionnalité

Méthode : Compléter un tableau de proportionnalité

Vidéo https://youtu.be/ryQJljicsxU

Compléter les tableaux de proportionnalité :

a)

3	4
4,5	?

b)

15	?
18	24

Correction :

a) Calcul du coefficient de proportionnalité : $4{,}5 : 3 = 1{,}5$

$4 \times 1{,}5 = 6$

3	4
4,5	6

$\times 1{,}5$

b) Calcul du coefficient de proportionnalité : $18 : 15 = 1{,}2$

$24 : 1{,}2 = 20$

$: 1{,}2$

15	20
18	24

$\times 1{,}2$

Si on tourne la flèche dans l'autre sens, on divise par le coefficient de proportionnalité.

Méthode : Appliquer la proportionnalité (différentes méthodes)

Vidéo https://youtu.be/O91-Dq06k0U

Pour son anniversaire, Violette souhaite inviter ses amies au cinéma. Elle devrait payer 28 € pour 4 places.
Finalement, les parents de Violette accompagnent tout ce petit monde et proposent alors de payer.
Sachant que le prix est proportionnel au nombre de places, combien payeront les parents de Violette pour 6 places ?

Correction

<table>
<tr>
<td>Méthode 1
Par coefficient de proportionnalité</td>
<td>Méthode 2
Par multiplication</td>
<td>Méthode 3
Par addition</td>
<td>Méthode 4
Passage à l'unité</td>
</tr>
<tr>
<td>
$28 : 4 = 7$
7 est le coefficient de proportionnalité.
<table>
<tr><td>Nombre de places</td><td>4</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Prix</td><td>28</td><td>x</td></tr>
</table>
× 7
$x = 6 \times 7 = 42$
</td>
<td>
$6 : 4 = 1{,}5$
× 1,5
<table>
<tr><td>Nombre de places</td><td>4</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Prix</td><td>28</td><td>x</td></tr>
</table>
$x = 28 \times 1{,}5 = 42$
</td>
<td>
$4 + 2 = 6$
+
<table>
<tr><td>Nombre de places</td><td>4</td><td>2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Prix</td><td>28</td><td>14</td><td>x</td></tr>
</table>
$x = 28 + 14 = 42$
</td>
<td>
4 places coûtent 28 €, donc 1 place coûte 4 fois moins, soit :
$28 : 4 = 7$ €.

6 places coûtent 6 fois plus ; soit :
$6 \times 7 = 42$
</td>
</tr>
</table>

Les parents de Violette devront payer 42 €.

Méthode : Résoudre un problème de proportionnalité

Vidéo https://youtu.be/g6O2B_5TuCc

a) 2 m^2 de carrelage coûte 40 €. Le prix est proportionnel à la quantité achetée.

Compléter le tableau :

Quantité en m^2	1	10	12	20	25	30	40	50
Prix en €								

b) La location d'une petite voiture électrique durant 4 heures coûte 33 €.
Le prix est proportionnel au temps de location.
Compléter le tableau :

Durée de location en h	4	
Prix en €	33	57,75

Correction
a) Le coefficient de proportionnalité est égal à 20.
En effet 40 : 2 = 20. Ce qui signifie également que 1 m^2 de carrelage coûte 20 €.
Ainsi, les nombres de la deuxième ligne s'obtiennent en multipliant ceux de la première par 20.

Quantité en m^2	1	10	12	20	25	30	40	50
Prix en €	20	200	240	400	500	600	800	1 000

$\times$ 20

b) 4 : 33 ne donne pas de valeur décimale exacte. Exprimons alors le coefficient de proportionnalité en prenant 33 : 4 = 8,25.
On effectue alors :
57,75 : 8,25 = 7

Durée de location en h	4	7
Prix en €	33	57,75

: 8,25 ; $\times$ 8,25

TP info : « ASSR »
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/ASSR.pdf
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/ASSR.ods (Feuille de calcul OOo)

Partie 2 : Pourcentages

1) Appliquer un pourcentage

Méthode : Appliquer un pourcentage (1)

Vidéo https://youtu.be/Ce6E56gsbY0
Vidéo https://youtu.be/2UVaPRdSMl0

Lors du premier jour de la mise en vente des billets du concert de Penelop Spears, 72 % des 9 000 billets disponibles ont été vendus. Combien de billets ont été vendus ce premier jour ?

Correction
72 % de 9 000 = $\frac{72}{100} \times 9\,000$
= $0,72 \times 9\,000$
= 6 480
6 480 billets ont été vendus le premier jour.

2) Calculer un pourcentage

Méthode : Calculer un pourcentage

Vidéo https://youtu.be/_TcFaeFb6sI
Vidéo https://youtu.be/vAK1NWWINi8

Le collège René Descartes compte 650 élèves. Parmi eux, 351 sont demi-pensionnaires.
Quel est le pourcentage de demi-pensionnaires au collège ?

Correction
Le nombre d'élèves demi-pensionnaires est de 351 sur un total de 650 élèves, soit :

$$\frac{351}{650} = 0{,}54 = \frac{54}{100} = 54\ \%$$

Le pourcentage d'élèves demi-pensionnaires au collège René Descartes est de 54 %.

Partie 3 : Applications de la proportionnalité

1) Échelles

Définition : Une carte à l'**échelle** $\frac{1}{1\ 000}$ signifie que :
1 ***cm*** sur la carte représente 1 000 ***cm*** dans la réalité.

Méthode : Appliquer une échelle

Vidéo https://youtu.be/-nKF5P_xxyQ

A quelle distance réelle correspond une longueur mesurée de 8,3 cm sur une carte à l'échelle $\frac{1}{1\ 000}$?

Correction
On complète les données de l'énoncé dans un tableau de proportionnalité :

Carte (en cm)	1	8,3
Réalité (en cm)	1 000	8 300

$\times 1\ 000$

8,3 × 1 000 = 8 300 cm.
La distance réelle est égale à 8 300 cm = 83 m.

Méthode : Calculer une échelle

Vidéo https://youtu.be/82qxwdhWYq8

Un bateau de 25 m correspond à une longueur de 10 cm sur son modèle réduit.
Quelle est l'échelle de réduction ?

Correction

● On commence par mettre toutes les longueurs dans la même unité :
25 m = 2 500 cm

● Chercher l'échelle répond à la question :
« Si une longueur mesure 1 cm sur le modèle réduit, quelle est sa longueur dans la réalité ? »
On complète le tableau de proportionnalité :

Modèle réduit (en cm)	10	1
Réalité (en cm)	2 500	250

$\times 250$

$1 \times 250 = 250$.

L'échelle est $\frac{1}{250}$.

2) Durées et distances

Rappels : Conversions d'unités de temps

Vidéo https://youtu.be/5xtJtMGEQT8

Vidéo https://youtu.be/ZV7VG7NzDwE

Méthode : Utiliser les durées

Vidéo https://youtu.be/x6WHxJUI1kE

Un athlète de course à pied parcourt 12 km en trois-quarts d'heure. Si la distance parcourue reste proportionnelle au temps, combien de kilomètres parcourt-il en 1 heure ?

Correction

● Pour simplifier les calculs, on convertit les heures en minutes :
$\frac{3}{4}$ h = 45 min et 1 h = 60 min.

● On construit un tableau de proportionnalité :

Distance en km	12	16
Temps en min	45	60

$: 3{,}75$ $\times 3{,}75$

Calcul du coefficient de proportionnalité :
$45 : 12 = 3{,}75$

$60 : 3{,}75 = 16$
L'athlète parcourt 16 km en une heure.