LES FONCTIONS DE REFERENCE

I. Fonctions affines et fonctions linéaires

1. Définitions

Une fonction affine f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux nombres réels.
Lorsque b = 0, la fonction f définie par $f(x) = ax$ est une fonction linéaire.

Exemples :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x + 6$ est une fonction affine.

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{2}{7}x$ est une fonction linéaire.

Exercices conseillés	En devoir
p92 n°11, 12	p92 n°13

2. Variations

Propriété :
Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
Si $a > 0$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a < 0$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

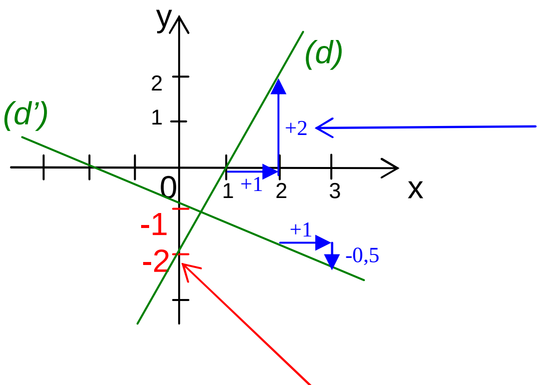
Soient m et p deux nombres réels tels que $m < p$.
$f(p) - f(m) = (ap + b) - (am + b) = a(p - m)$
On sait que $m < p$ donc $p - m > 0$.
Le signe de $f(p) - f(m)$ est le même que celui de a.

- Si $a > 0$, alors $f(p) - f(m) > 0$ soit $f(m) < f(p)$.
  Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a = 0$, alors $f(p) - f(m) = 0$ soit $f(m) = f(p)$.
  Donc f est constante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$, alors $f(p) - f(m) < 0$ soit $f(m) > f(p)$.
  Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. Représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.
Dans le cas d'une fonction linéaire, il s'agit d'une droite passant par l'origine du repère.
Dans le cas d'une fonction constante, il s'agit d'une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Exemple



2 est le coefficient directeur
(si on « avance en abscisse » de 1, on « monte en ordonnée » de **2**)

-2 est l'ordonnée à l'origine
(il se lit sur l'axe des ordonnées)

Pour *(d)* : Le coefficient directeur est 2
L'ordonnée à l'origine est -2
La fonction f représentée par la droite *(d)* est définie par $f(x) = 2x - 2$

Pour *(d')* : Le coefficient directeur est -0,5
L'ordonnée à l'origine est -1
La fonction g représentée par la droite *(d')* est définie par $g(x) = -0{,}5x - 1$

Pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$:
a est coefficient directeur et b est l'ordonnée à l'origine de la droite représentative.

Propriété :
Si A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) sont deux points distincts de la droite *(d)* représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ alors :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

<u>Démonstration :</u>

$y_B - y_A = f(x_B) - f(x_A) = (ax_B + b) - (ax_A + b) = a(x_B - x_A)$
Comme la droite (d) n'est pas verticale, $x_A \neq x_B$, et on a :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Exercices conseillés	En devoir
p91 n°4, 5, 8 et 9 p92 n°15 et 18	p91 n°6 et 7

<u>Méthode : Déterminer l'expression d'une fonction affine.</u>

Dans un repère, la représentation graphique correspondant à une fonction affine f passe par les points A(-2 ; 4) et B(3 ; 1).
Déterminer par calcul une expression de la fonction f.

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$a = \frac{1-4}{3-(-2)} = -\frac{3}{5}$$

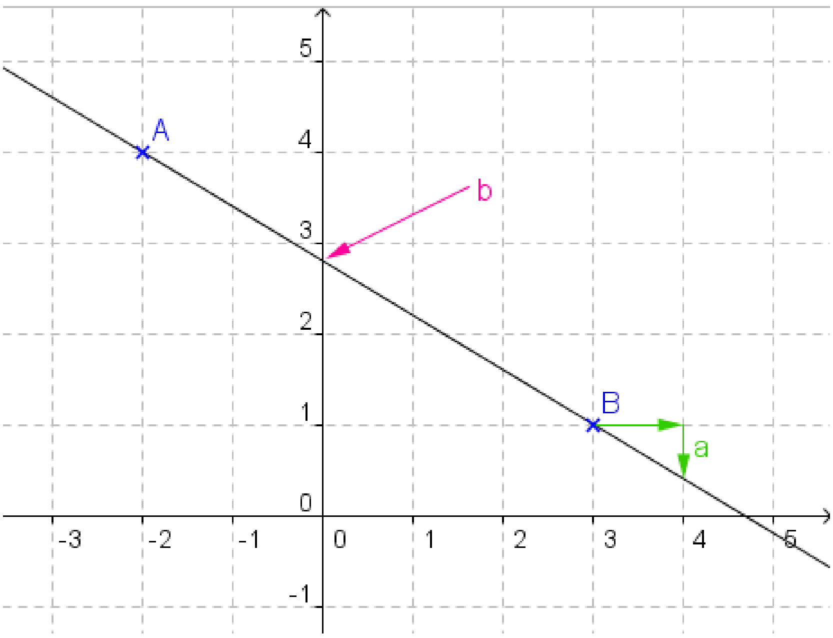
Comme A est un point de la droite, on a : $f(-2) = 4$

De plus : $f(x) = -\frac{3}{5}x + b$, donc on a :

$4 = -\frac{3}{5} \times (-2) + b$ donc $b = \frac{14}{5}$.

D'où : $f(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{14}{5}$

<u>Remarque :</u>
Le graphique permet de lire des valeurs approchées
Cette méthode graphique n'est pas précise mais permet d'avoir un ordre de grandeur des valeurs cherchées.



Exercices conseillés	En devoir
p91 n°1 et 2 p92 n°16 p93 n°21 et 24	p91 n°3 p93 n°23

II. Fonction carré

1. Définition

La fonction carrée f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

2. Variations

Propriété :
La fonction carré f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Démonstration :

- Soient a et b deux nombres réels quelconques positifs tels que $a < b$.

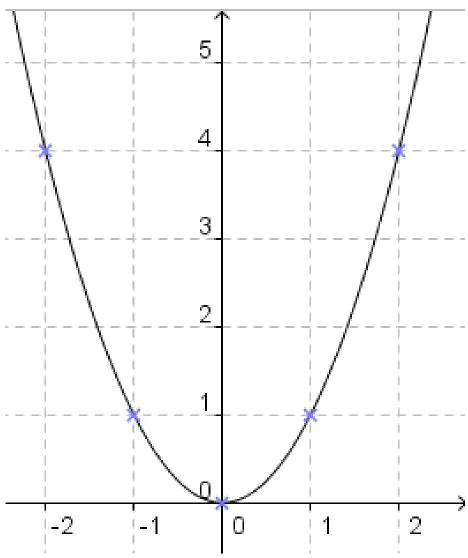
$f(b) - f(b) = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$

Or $b - a > 0$, $a \geq 0$ et $b \geq 0$ donc $f(b) - f(a) \geq 0$ ce qui prouve que f est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

- La décroissance sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ est prouvée de manière analogue en choisissant a et b deux nombres réels quelconques négatifs tels que $a < b$.

3. Représentation graphique

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4



Remarques :

1) Le tableau de valeurs n'est pas un tableau de proportionnalité. La fonction carrée n'est donc pas une fonction linéaire.

2) Dans un repère (O, I, J), la courbe de la fonction carré est appelée une parabole de sommet O.

3) Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction carrée est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercices conseillés	En devoir
p94 n°28, 29, 30, 35, 36 p95 n°43 p99 n°72*, 73*	p94 n°33 et 40

III. Fonction inverse

1. Définition

La fonction inverse f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Remarques :

- $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ désigne l'ensemble des nombres réels sauf 0, c'est-à-dire]-∞ ;0[U [0 ;+∞[. On peut aussi noter cet ensemble $\mathbb{R}^*$.
- La fonction inverse n'est pas définie en 0.

2. Variations

Propriété :
La fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0[$ et décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Remarque :

La variation d'une fonction ne peut s'étudier que sur un intervalle.
On ne peut donc pas évoquer de décroissance sur]-∞ ; 0[U]0 ; +∞[qui n'est pas un intervalle mais conclure de manière séparée que la fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0[$ et décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Démonstration :

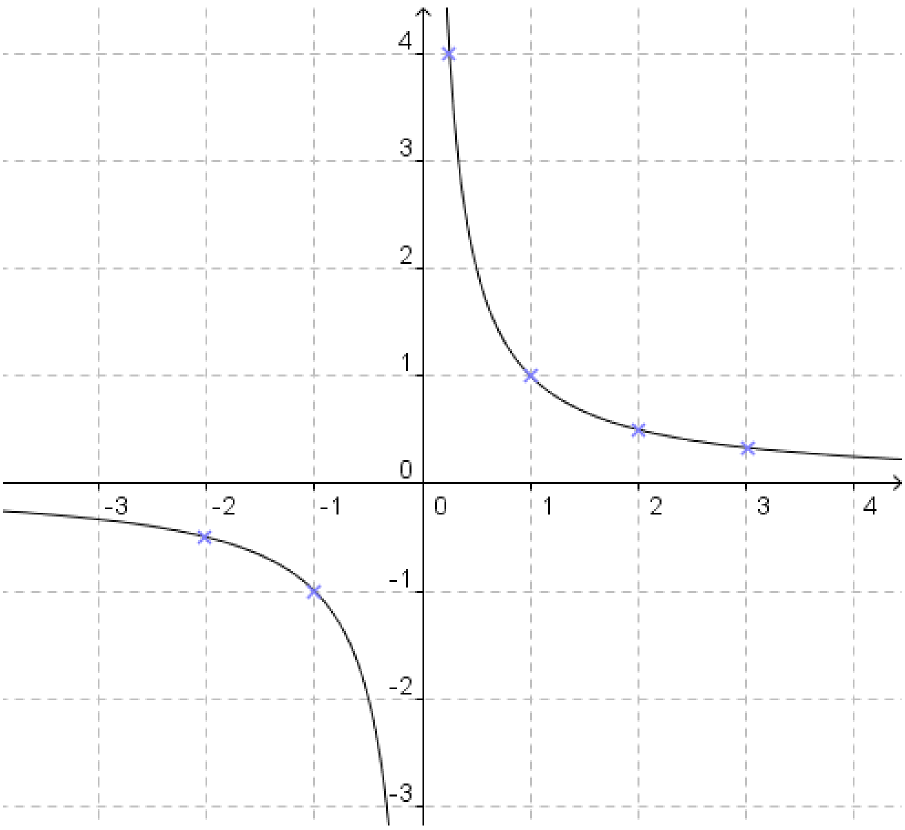
- Soient a et b deux nombres réels strictement positifs avec $a < b$.
  $$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}.$$

Or $a > 0$, $b > 0$ et $a - b < 0$. Donc $f(b) - f(a) \leq 0$.
f est ainsi décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

- La décroissance sur l'intervalle $]-\infty;0[$ est prouvée de manière analogue.

3. Représentation graphique

x	-2	-1	0,25	1	2	3
$f(x)$	-0,5	-1	4	1	0,5	$\frac{1}{3}$



Remarques :

1) Dans un repère (O, I, J), la courbe de la fonction inverse est une hyperbole de centre O.

2) La courbe de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine.

Exercices conseillés	En devoir
p96 n°49 à 53 p100 n°78*	p96 n°58 p100 n°79*

TP conseillés
TP TICE 2 p86 : Ordre et puissances TP TICE 3 p87 : Représentation graphique de fonctions à la calculatrice TP Algo p88 : Longueur d'une courbe TP Problème ouvert 1 p89 : Proche… à certains endroits