CONTINUITÉ

I. Rappels sur la dérivation

Vidéos https://www.youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCaoP_sqT3BQ3Q6oTr6QXodUt

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x)=a\ ,\ a\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=ax\ ,\ a\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=a$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ $n\geq 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ $n\geq 1$ entier	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x)=-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$\left[0;+\infty\right[$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left]0;+\infty\right[$

$u+v$ est dérivable sur I	$(u+v)'=u'+v'$
ku est dérivable sur I, où k est une constante	$(ku)'=ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)'=u'v+uv'$
$\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I, où u ne s'annule pas sur I	$\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$
$\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I, où v ne s'annule pas sur I	$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Exemples :

a) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$ alors f est dérivable sur $\left]-\infty;0\right[$ et sur $\left]0;+\infty\right[$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f'(x)=-\dfrac{4}{x^5}$.

b) $g(x)=\left(x^2+x\right)\left(5x-1\right)$

On pose : $g(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x^2 + x \quad \rightarrow \quad u'(x) = 2x + 1$

$v(x) = 5x - 1 \quad \rightarrow \quad v'(x) = 5$

Donc :

$g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (2x+1)(5x-1) + (x^2+x) \times 5$

$= 10x^2 - 2x + 5x - 1 + 5x^2 + 5x$

$= 15x^2 + 8x - 1$

c) $h(x) = \dfrac{6x-5}{x^2-1}$

On pose : $h(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 6x - 5 \quad \rightarrow \quad u'(x) = 6$

$v(x) = x^2 - 1 \quad \rightarrow \quad v'(x) = 2x$

Donc :

$$h'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$= \frac{6(x^2-1) - (6x-5)2x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{6x^2 - 6 - 12x^2 + 10x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{-6x^2 + 10x - 6}{(x^2-1)^2}$$

Théorème : Soit une fonction *f* définie et dérivable sur un intervalle I.
- Si $f'(x) \leq 0$, alors *f* est décroissante sur I.
- Si $f'(x) \geq 0$, alors *f* est croissante sur I.

Exemple :

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x$.

Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 2x - 4$.

Résolvons l'équation $f'(x) \leq 0$

$2x - 4 \leq 0$

$2x \leq 4$

$x \leq 2$

La fonction *f* est donc décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 2]$.

De même, on obtient que la fonction *f* est donc croissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

Méthode : Etudier les variations d'une fonction

On considère la fonction f définie sur [0 ; 10] par $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+7$

Etudier les variations de la fonction f.

Pour tout x réel, on a : $f'(x)=\frac{1}{3}\times 3x^2+2x-3=x^2+2x-3$.

Commençons par résoudre l'équation $f'(x)=0$:

Le discriminant du trinôme x^2+2x-3 est égal à $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$

L'équation possède deux solutions : $x_1=\frac{-2-\sqrt{16}}{2\times 1}=-3$ et $x_2=\frac{-2+\sqrt{16}}{2\times 1}=1$

On en déduit le tableau de variations de f :

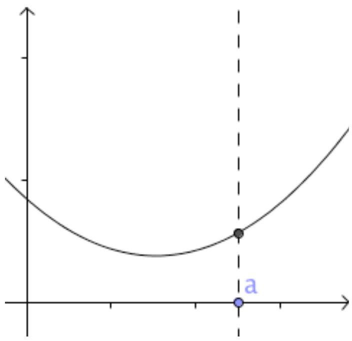
x	0		1		10
$f'(x)$		-	0	+	
f	17	↘	$\frac{16}{3}$	↗	$\frac{1231}{3}$

II. Continuité sur un intervalle

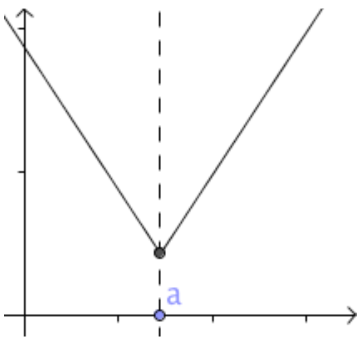
Le mathématicien allemand *Karl Weierstrass* (1815 ; 1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

Exemples et contre-exemples :

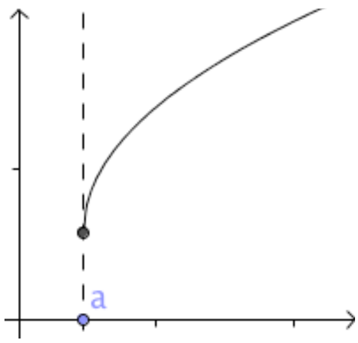
Vidéo https://youtu.be/XpjKserte6o



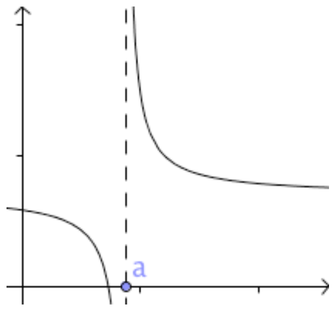
f est continue en a



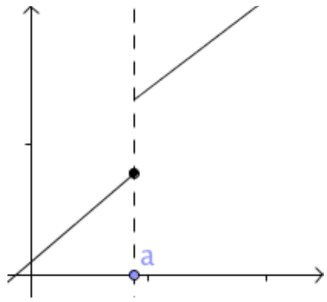
f est continue en a



f est continue en a



f n'est pas continue en a



f n'est pas continue en a

Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
On dit que f est continue sur I si on peut tracer la courbe représentative de f sur I *"sans lever le crayon".*

Propriétés :
1) Les fonctions $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) et plus généralement les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
2) Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
3) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\left[0;+\infty\right[$.
4) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\left]-\infty;0\right[$ et sur $\left]0;+\infty\right[$.

Remarque :
Les flèches obliques d'un tableau de variations traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

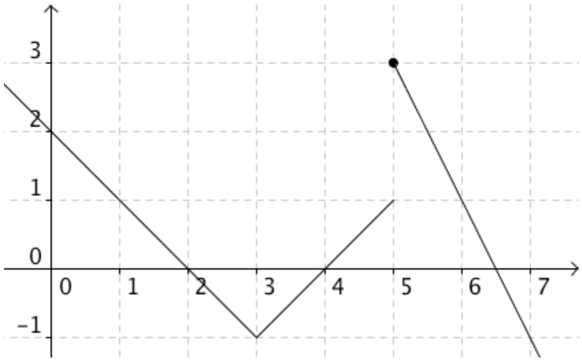
Théorème : Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.
- Admis -

Méthode : Etudier la continuité d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/gLmACk8BpAE

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = -x+2 & pour\ x < 3 \\ f(x) = x-4 & pour\ 3 \leq x < 5 \\ f(x) = -2x+13 & pour\ x \geq 5 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?



Les fonctions $x \mapsto -x+2$, $x \mapsto x-4$ et $x \mapsto -2x+13$ sont des fonctions polynômes donc continues sur $\mathbb{R}$.
Ainsi la fonction f est continue sur $\left]-\infty;3\right[$, sur $\left[3;5\right[$ et sur $\left[5;+\infty\right[$.

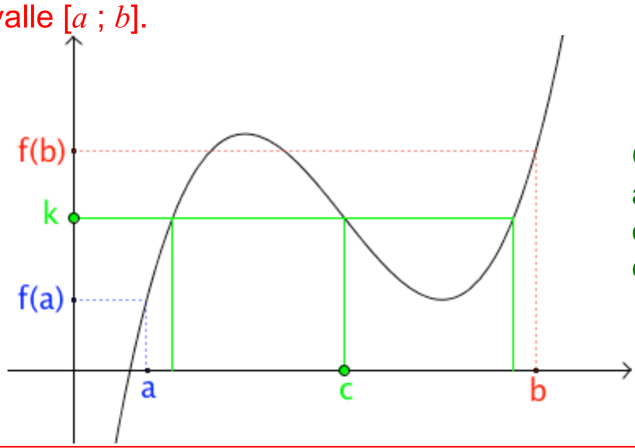
On peut tracer la fonction f sur $\left]-\infty;5\right[$ sans lever le crayon, elle est donc continue sur cet intervalle. Il en est de même sur l'intervalle $\left[5;+\infty\right[$.

Par contre, il n'est pas possible de franchir ces deux intervalles sans lever le crayon. La fonction f n'est donc pas continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est ainsi continue sur $\left]-\infty;5\right[$ et sur $\left[5;+\infty\right[$.

III. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème :
On considère la fonction f définie et continue sur un intervalle [a ; b].
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution dans l'intervalle [a ; b].

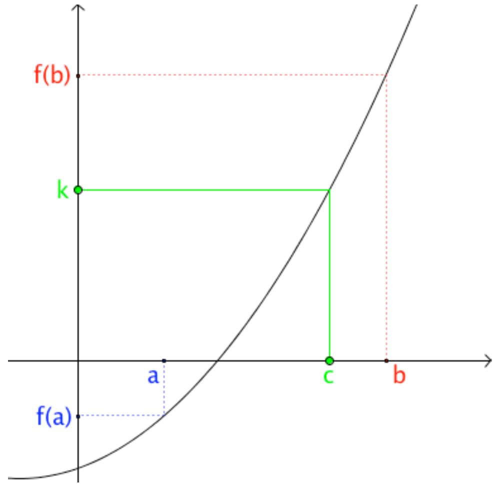


Ci-contre, $f(x) = k$ admet par exemple c comme solution.

- Admis -

Remarque :
Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle [a ; b].

Corollaire :
On considère la fonction f définie, continue et strictement monotone sur un intervalle [a ; b].
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution dans l'intervalle [a ; b].



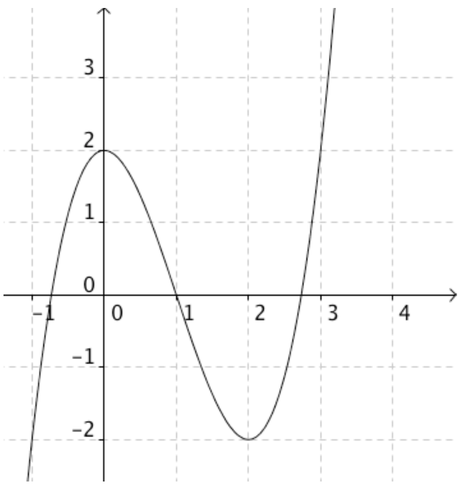
Méthode : Résolution approchée d'une équation

EXEMPLE 1

Vidéo https://youtu.be/fkd7c3lAc3Y

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2+2$.
1) Démontrer que $f'(x)=3x(x-2)$.
2) En déduire les variations de f sur l'intervalle $\left[2;3\right]$.
3) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement une solution sur l'intervalle $\left[2;3\right]$.
4) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution α.
5) Dresser le tableau de signes de la fonction f sur l'intervalle $\left[2;3\right]$.

On commence par tracer la fonction à l'aide de la calculatrice :



1) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

2) Pour tout x de $[2;3]$, $f'(x) > 0$.

La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2;3]$.

3) $f(2) = 2^3 - 3\times 2^2 + 2 = -2 < 0$

$f(3) = 3^3 - 3\times 3^2 + 2 = 2 > 0$

La fonction f est **<u>continue</u>** et **<u>strictement croissante</u>** sur l'intervalle $[2;3]$ et elle **<u>change de signe</u>**.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel x tel que $f(x) = 0$.

x	2		3
f	-2	$\nearrow$	2

2) À l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des balayages successifs en augmentant la précision.

X	Y1
0	2
1	0
2	-2
3	2
4	18
5	52
6	110

La solution est comprise entre 2 et 3.

X	Y1
2	-2
2.1	-1.969
2.2	-1.872
2.3	-1.703
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704

La solution est supérieure à 2,6

X	Y1
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704
2.7	-.187
2.8	.432
2.9	1.159
3	2

La solution est comprise entre 2,7 et 2,8

X	Y1
2.7	-.187
2.71	-.1298
2.72	-.0716
2.73	-.0123
2.74	.04802
2.75	.10938
2.76	.17178

La solution est comprise entre 2,73 et 2,74.

On en déduit que la solution de l'équation $f(x)=0$ est α telle que : $2{,}73<\alpha<2{,}74$.

5)

x	2		α		3
f		–	0	+	

EXEMPLE 2

Vidéo https://youtu.be/UmGQf7gkvLg

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-4x^2+6$.
Démontrer que l'équation $f(x)=2$ admet au moins une solution sur [-1 ; 4].

- f est continue sur [-1 ; 4] car une fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

- $f(-1)=(-1)^3-4\times(-1)^2+6=1$
$f(4)=4^3-4\times 4^2+6=6$
Donc 2 est compris entre $f(-1)$ et $f(4)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $f(x)=2$ admet au moins une solution sur [-1 ; 4].

Déterminer à la calculatrice les solutions d'une équation par encadrement :

Vidéo TI https://youtu.be/MEkh0fxPakk
Vidéo Casio https://youtu.be/XEZ5D19FpDQ
Vidéo HP https://youtu.be/93mBoNOpEWg