L'ESCALIER CONVERGENT

Commentaire : Découvrir la méthode de la représentation en escalier d'une suite pour conjecturer sa convergence.

Partie 1

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=(x-2)e^{-x}+2$.

1) Effectuer une étude complète la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$: variations, limites aux bornes, tangente(s) horizontale(s), asymptote(s), … On présentera les résultats dans un tableau de variations.

2) Représenter dans un repère la fonction f sur l'intervalle [0 ; 4]. On prendra 5 cm pour 1 unité sur les deux axes.

Partie 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0{,}5$ et pour tout entier n, $u_{n+1}=(u_n-2)e^{-u_n}+2$. On a ainsi pour tout entier n, $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) Pour cette question, on complètera dans le repère de la **partie 1** et on laissera **tous** les traits de construction :

- Placer u_0 sur l'axe des abscisses.
- En utilisant la courbe représentative de la fonction f, placer $u_1=f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées.
- Placer alors u_1 sur l'axe des abscisses. On s'aidera de la droite d'équation $y=x$.
- En utilisant la courbe représentative de la fonction f, placer $u_2=f(u_1)$ sur l'axe des ordonnées.
- Placer alors u_2 sur l'axe des abscisses. On s'aidera de la droite d'équation $y=x$.
- Poursuivre de la même manière pour placer u_3 et u_4 sur l'axe des abscisses.

2) Quelle conjecture permet d'établir la construction précédente ?

Partie 3

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier n, on a : $0\le u_n\le 2$.

2) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

3) En déduire la preuve du résultat conjecturé dans la **partie 2**.

4) Ecrire un algorithme qui donne le plus petit entier N tel que $1{,}99999\le u_N$. Quel est cet entier ?
On recopiera l'algorithme.