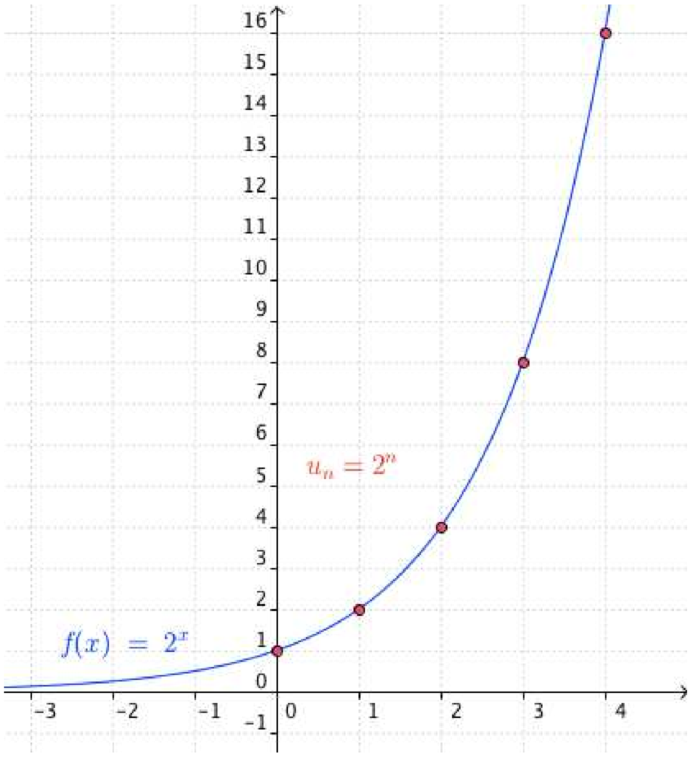
FONCTIONS EXPONENTIELLES

I. Fonction exponentielle de base q

1) Définition



On considère la suite géométrique de raison q définie par $u_n = q^n$.
Elle est définie pour tout entier naturel n.
En prolongeant son ensemble de définition pour tout réel positif, on définit la fonction exponentielle de base q.
Ainsi par exemple :
Pour une suite, on a $u_4 = 2^4$
Pour une fonction, on a $f(4) = 2^4$ mais on a aussi $f(1,3) = 2^{1,3}$

Définition : La fonction $x \mapsto q^x$, avec $q > 0$, s'appelle fonction exponentielle de base q.

Exemple :
La fonction exponentielle de base 1,2 est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 1,2^x$.

Remarque : Avec la calculatrice, il est possible de calculer des valeurs d'une fonction exponentielle de base q.

```
1.2^5
                 2.48832
1.2^-2
             .6944444444
1.2^2.3
             1.520956755
```

Propriété : La fonction exponentielle de base q est définie, strictement positive, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Admis -

2) Propriétés

Relation fonctionnelle : Pour tout réel x et y, on a $q^{x+y} = q^x \times q^y$

- Admis -

Remarque : Cette formule permet de transformer une somme en produit et réciproquement.

Propriétés : Pour tout réel x et y, on a :

a) $q^0 = 1$ et $q^1 = q$

b) $q^{-x} = \dfrac{1}{q^x}$

c) $q^{x-y} = \dfrac{q^x}{q^y}$

d) $\left(q^x\right)^n = q^{nx}$ avec n un entier relatif.

Démonstration de b et c :

b) $q^x q^{-x} = q^{x-x} = q^0 = 1$ donc $q^{-x} = \dfrac{1}{q^x}$.

c) $q^{x-y} = q^{x+(-y)} = q^x q^{-y} = q^x \dfrac{1}{q^y} = \dfrac{q^x}{q^y}$

Méthode : Simplifier une expression

Simplifier les expressions suivantes :

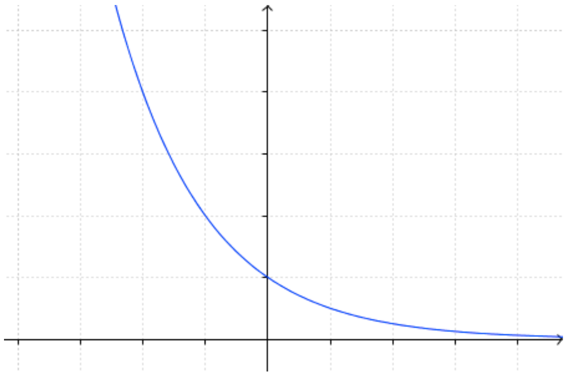
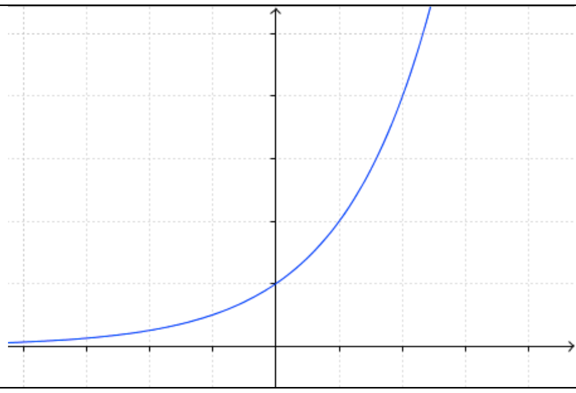
$A = 4^{-3} \times 4^{-5}$ $\quad B = \dfrac{2,3^3 \times 2,3^{-5}}{2,3^5}$ $\quad C = \left(4,8^3\right)^{-2,1} \times 4,8^{6,2}$

$$A = 4^{-3} \times 4^{-5}$$
$$= 4^{-3+(-5)}$$
$$= 4^{-8}$$

$$B = \dfrac{2,3^3 \times 2,3^{-5}}{2,3^5}$$
$$= \dfrac{2,3^{3+(-5)}}{2,3^5}$$
$$= \dfrac{2,3^{-2}}{2,3^5}$$
$$= 2,3^{-2-5}$$
$$= 2,3^{-7}$$

$$C = \left(4,8^3\right)^{-2,1} \times 4,8^{6,2}$$
$$= 4,8^{3\times(-2,1)} \times 4,8^{6,2}$$
$$= 4,8^{-6,3} \times 4,8^{6,2}$$
$$= 4,8^{-6,3+6,2}$$
$$= 4,8^{-0,1}$$

3) Variationsw

$0<q<1$	$q>1$
$x \mapsto q^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$	$x \mapsto q^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$
$\lim\limits_{x \to -\infty} q^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} q^x = 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} q^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} q^x = +\infty$
	

- Admis -

Remarques :
- Si $q=1$ alors la fonction exponentielle de base q est constante. En effet, dans ce cas, $q^x = 1^x = 1$
- Quel que soit q, la fonction exponentielle de base q passe par le point (0 ; 1). En effet, $q^0 = 1$.
- La fonction exponentielle de base q est convexe.

Méthode : Utiliser une fonction exponentielle de base q

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur [0 ; 10] par : $f(x) = 50000 \times 1{,}15^x$.

a) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.
b) Déterminer les variations de f sur [0 ; 10].
c) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a doublé ?

a) $f(3) = 50000 \times 1{,}15^3 \approx 76000$
$f(5{,}5) = 50000 \times 1{,}15^{5{,}5} \approx 108000$

```
50000*1.15^3
          76043.75
50000*1.15^5.5
       107847.0143
```

b) 1,15 > 1 donc la fonction $x \mapsto 1{,}15^x$ est strictement croissante sur [0 ; 10]. Il en est de même pour la fonction *f*.

c) Le nombre de bactéries a doublé à partir de 100000 bactéries, soit au bout d'environ 5h.

X	Y1
4.91	99311
4.92	99450
4.93	99589
4.94	99728
4.95	99868
4.96	100007
4.97	100147

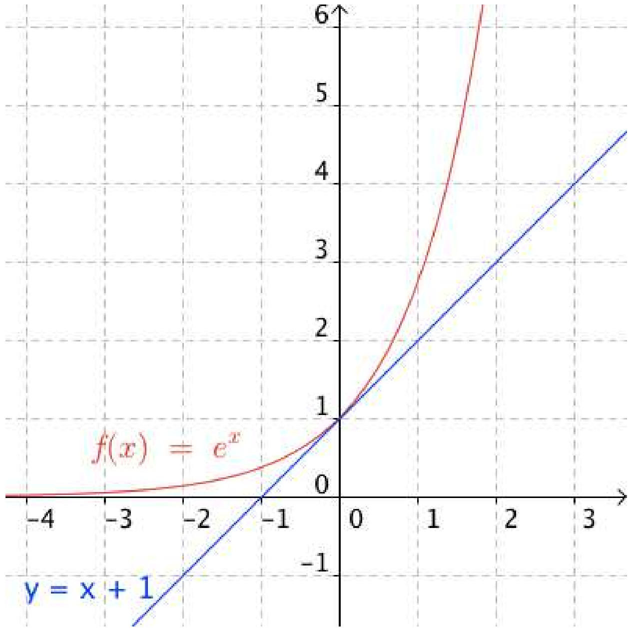
X=4.96

II. Fonction exponentielle de base *e*

1) Définition

Propriété : Parmi toutes les fonctions $x \mapsto q^x$, il en existe une seule dont la tangente à la courbe représentative au point (0 ; 1) a pour coefficient directeur 1.

- Admis -



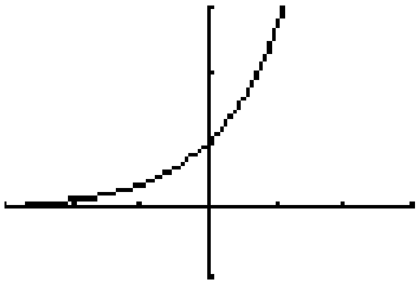
Définition : Cette fonction est la fonction exponentielle de base e, notée **exp**, telle que pour tout réel x, on a $\exp : x \mapsto e^x$.
Le réel e est environ égal à 2,718.

Remarques : Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de e.

e^1

2.718281828

Il est également possible d'observer l'allure de la courbe représentative de la fonction exponentielle :



Remarque : On verra que la fonction exponentielle est croissante. Mais sa croissance est très rapide, ainsi exp(21) dépasse le milliard.

Comme π, le nombre e est un nombre irrationnel, c'est à dire qu'il s'écrit avec un nombre infini de décimales sans suite logique.
Ses premières décimales sont :
$e \approx$ 2,7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 4709369995 9574966967 6277240766 3035354759 4571382178 5251664274…
Le premier à s'intéresser de façon sérieuse au nombre e est le mathématicien suisse *Leonhard Euler* (1707 ; 1783), ci-dessus. C'est à lui que nous devons le nom de ce nombre. Non pas qu'il s'agisse de l'initiale de son nom mais peut être car e est la première lettre du mot exponentiel.
Dans « *Introductio in Analysin infinitorum* » publié en 1748, *Euler* explique que :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...$$

Rappelons que par exemple 5! se lit "factoriel 5" et est égal à 1 x 2 x 3 x 4 x 5.
Par cette formule, il obtient une estimation de e avec 18 décimales exactes.
Nous devons aussi à Euler la démonstration de l'irrationalité de e.

2) Propriétés

Propriétés : Pour tout réel x et y, on a :

a) $e^0 = 1$ et $e^1 = e$

b) $e^x > 0$

c) $e^{x+y} = e^x e^y$

d) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

e) $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

f) $\left(e^x\right)^n = e^{nx}$ avec n un entier relatif.

Remarque : On retrouve les propriétés des puissances.

Méthode : Simplifier les écritures

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A=\dfrac{e^7\times e^{-4}}{e^{-5}}$ $\qquad B=\left(e^5\right)^{-6}\times e^{-3}$ $\qquad C=\dfrac{1}{\left(e^{-3}\right)^2}+\dfrac{\left(e^4\right)^{-1}}{e^2\times e^{-6}}$

$$\begin{aligned}A&=\frac{e^7\times e^{-4}}{e^{-5}}\\&=\frac{e^{7-4}}{e^{-5}}\\&=\frac{e^3}{e^{-5}}\\&=e^{3-(-5)}\\&=e^8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B&=\left(e^5\right)^{-6}\times e^{-3}\\&=e^{5\times(-6)}\times e^{-3}\\&=e^{-30}\times e^{-3}\\&=e^{-30-3}\\&=e^{-33}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C&=\frac{1}{\left(e^{-3}\right)^2}+\frac{\left(e^4\right)^{-1}}{e^2\times e^{-6}}\\&=\frac{1}{e^{-3\times 2}}+\frac{e^{4\times(-1)}}{e^{2-6}}\\&=\frac{1}{e^{-6}}+\frac{e^{-4}}{e^{-4}}\\&=e^6+1\end{aligned}$$

3) Dérivabilité

Propriété : Le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 est égal à 1.

Démonstration : Par définition, la tangente à la courbe représentative en 0 a pour coefficient directeur 1.

Propriété : La fonction exponentielle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\exp x)'=e^x$

- Admis -

Méthode : Dériver une fonction

Dériver sur $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes :

a) $f(x)=4x-3e^x$ $\qquad$ b) $g(x)=(x-1)e^x$ $\qquad$ c) $h(x)=\dfrac{e^x}{x}$

a) $f'(x)=4-3e^x$

b) $g'(x)=1\times e^x+(x-1)e^x=e^x+xe^x-e^x=xe^x$

c) $h'(x)=\dfrac{e^x\times x-e^x\times 1}{x^2}=\dfrac{e^x\left(x-1\right)}{x^2}$

4) Variations

Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Comme $\left(\exp x\right)'=\exp x>0$, la fonction exponentielle est strictement croissante.

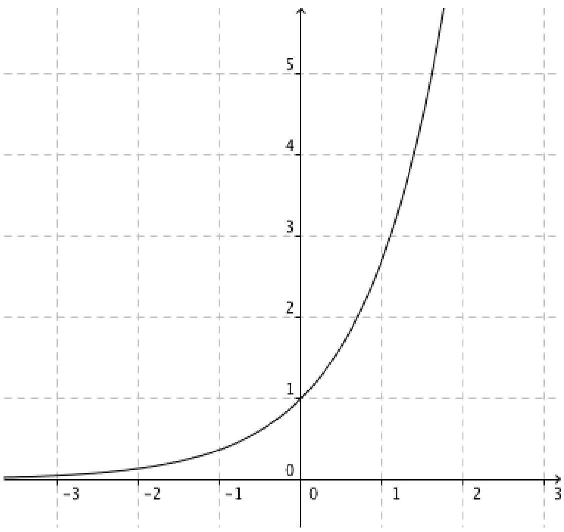
5) Limites en l'infini

Propriété : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

6) Courbe représentative

On dresse le tableau de variations de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$		$+\infty$
$\left(\exp x\right)'$		+	
$\exp x$	0	↗	$+\infty$



7) Résolution d'équations et d'inéquations

Propriétés : Pour tout réel a et b, on a :

a) $e^a=e^b \quad \Leftrightarrow \quad a=b$

b) $e^a<e^b \quad \Leftrightarrow \quad a<b$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3}-e^{-2x}=0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{4x-1}\geq 1$.

a) $e^{x^2-3}-e^{-2x}=0$

$\Leftrightarrow e^{x^2-3}=e^{-2x}$

$\Leftrightarrow x^2-3=-2x$

$\Leftrightarrow x^2+2x-3=0$

$\Leftrightarrow x=-3 \quad ou \quad x=1$

Les solutions sont -3 et 1.

b) $e^{4x-1}\geq 1$

$\Leftrightarrow e^{4x-1}\geq e^0$

$\Leftrightarrow 4x-1\geq 0$

$\Leftrightarrow x\geq \frac{1}{4}$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$.

III. Fonctions de la forme e^u

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction $x\mapsto e^u$ est dérivable sur I. Sa dérivée est la fonction $x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$.

- Admis -

Exemple :
Soit $f(x)=e^{4x+3}$ alors $f'(x)=4e^{4x+3}$

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Les fonctions $x\mapsto u(x)$ et $x\mapsto e^{u(x)}$ ont le même sens de variation.

Démonstration :
On a $(e^u)'=u'e^u$

Comme $e^u>0$, u' et $(e^u)'$ sont de même signe.

Exemple :
La fonction $x\mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ donc la fonction $x\mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est également décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

Méthode : Etudier une fonction

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

a) Calculer la dérivée de la fonction *f*.
b) Dresser le tableau de variation de la fonction *f*.
c) Tracer la courbe représentative de la fonction *f* en s'aidant de la calculatrice graphique.
d) Déterminer une valeur approchée de l'abscisse du point d'inflexion à la courbe.
e) Démontrer que $f''(x) = \left(\frac{x}{4} - 1\right)e^{-\frac{x}{2}}$.
f) En déduire l'abscisse du point d'inflexion.

a) $f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} + x \times \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} = \left(1 - \frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$

b) Comme $e^{-\frac{x}{2}} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \frac{x}{2}$.

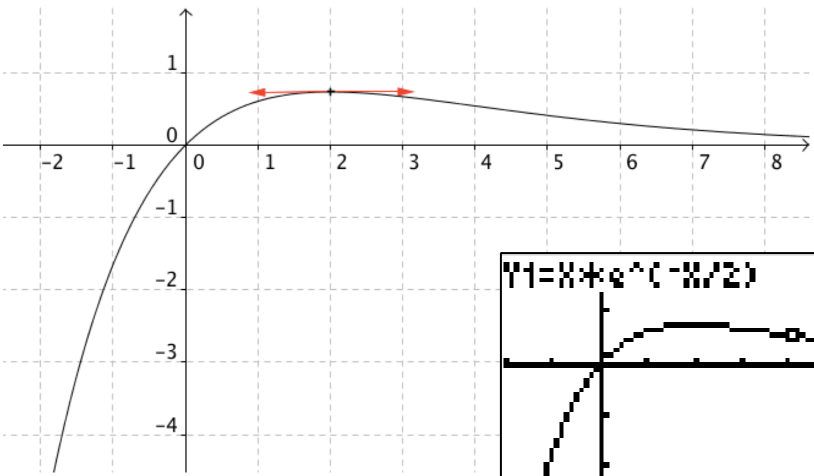
f est donc croissante sur l'intervalle $\left]-\infty;2\right]$ et décroissante sur l'intervalle $\left[2;+\infty\right[$.

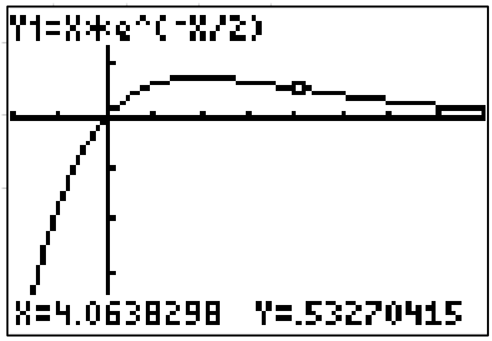
On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	$\frac{2}{e}$	↘	

$f(2) = 2e^{-\frac{2}{2}} = 2e^{-1} = 2\frac{1}{e} = \frac{2}{e}$

c)





d) Le point d'inflexion semble avoir pour abscisse une valeur proche de 4.

e) $f''(x)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$

$=-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}+\frac{x}{4}e^{-\frac{x}{2}}$

$=-e^{-\frac{x}{2}}+\frac{x}{4}e^{-\frac{x}{2}}$

$=\left(\frac{x}{4}-1\right)e^{-\frac{x}{2}}$

f) Comme $e^{-\frac{x}{2}}>0$, $f''(x)$ est du signe de $\frac{x}{4}-1$.

Donc $f''(x)\geq 0$ pour $\frac{x}{4}-1\geq 0$ soit $x\geq 4$.

$f''(x)\leq 0$ pour $\frac{x}{4}-1\leq 0$ soit $x\leq 4$.

Ainsi f' est croissante sur $\left[4;+\infty\right[$ et donc *f* est convexe sur cet intervalle.

f' est décroissante sur $\left]-\infty;4\right]$ et donc *f* est concave sur cet intervalle.

On en déduit que la courbe représentative de *f* possède un point d'inflexion d'abscisse 4.