FONCTION DERIVÉE

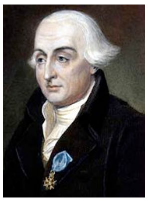
I. Dérivées des fonctions usuelles

Exemple :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.
Calculons le nombre dérivé de la fonction f en un nombre réel quelconque a.

Pour $h \neq 0$: $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{(a+h)^2-a^2}{h}=\dfrac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}=2a+h$

Or : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}2a+h=2a$

Pour tout nombre a, on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à 2a.
On a donc défini sur $\mathbb{R}$ une fonction, notée f' dont l'expression est $f'(x)=2x$.
Cette fonction s'appelle la fonction dérivée de f.



Le mot « dérivé » vient du latin « derivare » qui signifiait « détourner un cours d'eau ».
Le mot a été introduit par le mathématicien franco-italien *Joseph Louis Lagrange* (1736 ; 1813) pour signifier que cette nouvelle fonction dérive (au sens de "provenir") d'une autre fonction.

Définitions : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x de I.
Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f et se note f'.

Formules de dérivation des fonctions usuelles :

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x)=a$, $a\in {}^\circ$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=ax$, $a\in {}^\circ$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=a$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ $n\geq 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ $n\geq 1$ entier	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x)=-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

Exemples :

Vidéo https://youtu.be/9Mann4wOGJA

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=4x^3$.

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x)=\frac{1}{x^5}$ alors f est dérivable sur $\left]-\infty;0\right[$ et sur $\left]0;+\infty\right[$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f'(x)=-\frac{5}{x^6}$.

Démonstration pour la fonction inverse :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.

Pour $h\neq 0$ et $h\neq -a$: $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\frac{\frac{a-a-h}{a(a+h)}}{h}=-\frac{1}{a(a+h)}$

Or : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}-\frac{1}{a(a+h)}=-\frac{1}{a^2}$

Pour tout nombre a, on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à $-\frac{1}{a^2}$.

Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a : $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

Méthode : Calculer une dérivée en un point et déterminer l'équation de la tangente

Vidéo https://youtu.be/bELc3OM9osQ

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4$.
1) Calculer le nombre dérivé de f en x = 1.
2) En déduire l'équation de la tangente en x = 1.

1) $f'(x)=4x^3$ donc $f'(1)=4\times 1^3=4$.
2) L'équation de la tangente en x = 1 est $y=f'(1)(x-1)+f(1)$.
Soit : $y=4(x-1)+1$ car $f(1) = 1^4 = 1$
Soit encore : $y=4x-3$.

II. Opérations sur les fonctions dérivées

Exemple :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+x^2$.

Pour $h \neq 0$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\frac{a+h+(a+h)^2-a-a^2}{h}$$
$$=\frac{a+h+a^2+2ah+h^2-a-a^2}{h}$$
$$=\frac{h+2ah+h^2}{h}=1+2a+h$$

donc $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}1+2a+h=1+2a$

alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=1+2x$.

On pose pour tout x de $\mathbb{R}$, $u(x)=x$ et $v(x)=x^2$. On a ainsi : $f(x)=u(x)+v(x)$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $u'(x)=1$ et $v'(x)=2x$.
On constate sur cet exemple que : $f'(x)=u'(x)+v'(x)$.
Soit encore : $(u+v)'(x)=u'(x)+v'(x)$

<u>Formules d'opération sur les fonctions dérivées :</u>

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

$u+v$ est dérivable sur I	$(u+v)'=u'+v'$
ku est dérivable sur I, où k est une constante	$(ku)'=ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)'=u'v+uv'$
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I, où u ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, où v ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

<u>Méthode :</u> Calculer les dérivées de sommes, produits et quotients de fonctions

Vidéo https://youtu.be/ehHoLK98Ht0
Vidéo https://youtu.be/1fOGueiO_zk
Vidéo https://youtu.be/OMsZNNIIdrw
Vidéo https://youtu.be/jOuC7aq3YkM
Vidéo https://youtu.be/-MfEczGz_6Y

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f_1(x)=5x^3$ 2) $f_2(x)=3x^2+4\sqrt{x}$ 3) $f_3(x)=\frac{1}{2x^2+5x}$

4) $f_4(x)=\left(x^2+x\right)\left(5x-1\right)$ 5) $f_5(x)=\dfrac{6x-5}{x^2-1}$.

1) $f_1(x)=5u(x)$ avec $u(x)=x^3 \rightarrow u'(x)=3x^2$

Donc : $f_1'(x)=5u'(x)=5\times 3x^2=15x^2$.

2) $f_2(x)=u(x)+v(x)$ avec $u(x)=3x^2 \rightarrow u'(x)=6x$

$v(x)=4\sqrt{x}\rightarrow v'(x)=4\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

Donc : $f_2'(x)=u'(x)+v'(x)=6x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

3) $f_3(x)=\dfrac{1}{u(x)}$ avec $u(x)=2x^2+5x \rightarrow u'(x)=4x+5$

Donc : $f_1'(x)=-\dfrac{u'(x)}{\left(u(x)\right)^2}=-\dfrac{4x+5}{\left(2x^2+5x\right)^2}$.

4) $f_4(x)=u(x)v(x)$ avec $u(x)=x^2+x \rightarrow u'(x)=2x+1$

$v(x)=5x-1\rightarrow v'(x)=5$

Donc :

$f_2'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=\left(2x+1\right)\left(5x-1\right)+\left(x^2+x\right)\times 5$

$=10x^2-2x+5x-1+5x^2+5x$

$=15x^2+8x-1$

5) $f_5(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=6x-5 \rightarrow u'(x)=6$

$v(x)=x^2-1\rightarrow v'(x)=2x$

Donc :

$f_5'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$

$$= \frac{6\left(x^2-1\right)-\left(6x-5\right)2x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$= \frac{6x^2-6-12x^2+10x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$= \frac{-6x^2+10x-6}{\left(x^2-1\right)^2}$$