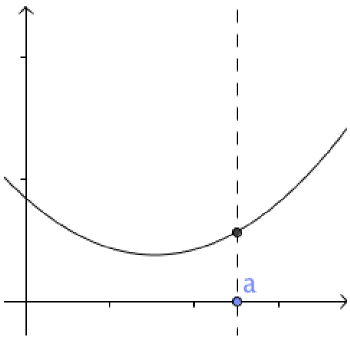
CONTINUITE ET CONVEXITE

I. Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

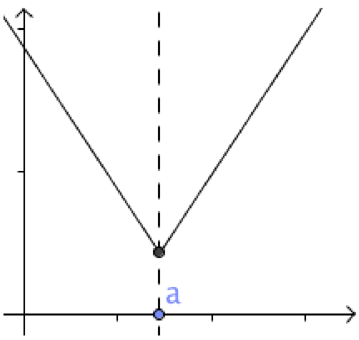
Le mathématicien allemand *Karl Weierstrass* (1815 ; 1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

1) Continuité

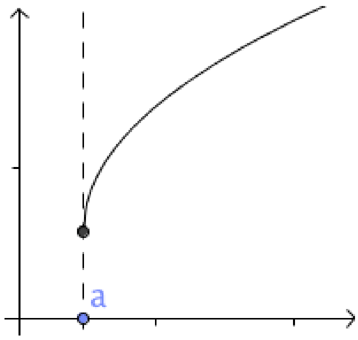
Exemples et contre-exemples :



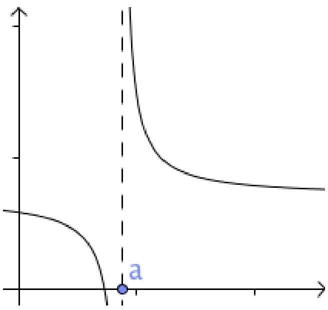
f est continue en a



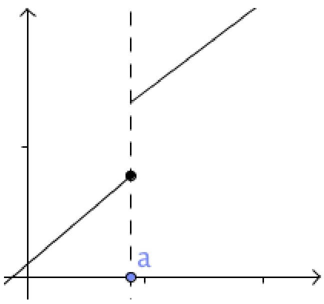
f est continue en a



f est continue en a



f n'est pas continue en a



f n'est pas continue en a

Définition : Soit une fonction *f* définie sur un intervalle I.
On dit que *f* est continue sur I si on peut tracer la courbe représentative de *f* sur I *"sans lever le crayon".*

Propriétés :
1) Les fonctions $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) et plus généralement les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
2) Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
3) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\left[0;+\infty\right[$.
4) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\left]-\infty;0\right[$ et sur $\left]0;+\infty\right[$.

- Admis -

Remarque :
Les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Théorème : Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

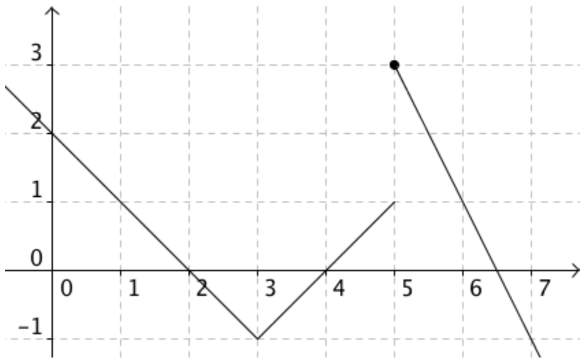
- Admis -

Méthode : Etudier la continuité d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = -x+2 & pour\ x < 3 \\ f(x) = x-4 & pour\ 3 \leq x < 5 \\ f(x) = -2x+13 & pour\ x \geq 5 \end{cases}$.

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Les fonctions $x \mapsto -x+2$, $x \mapsto x-4$ et $x \mapsto -2x+13$ sont des fonctions polynômes donc continues sur $\mathbb{R}$.
Ainsi la fonction f est continue sur $\left]-\infty;3\right[$, sur $\left[3;5\right[$ et sur $\left[5;+\infty\right[$.



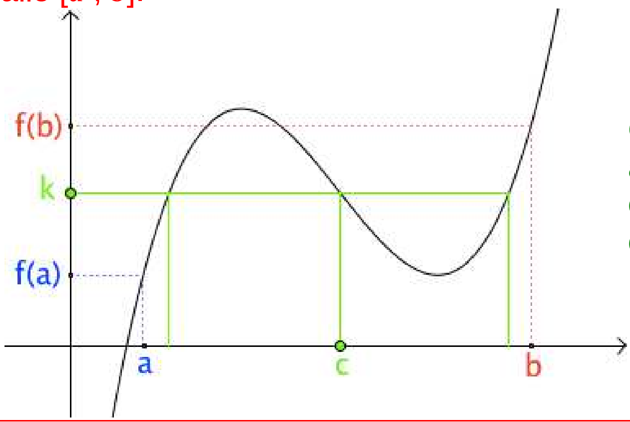
On peut tracer la fonction f sur $\left]-\infty;5\right[$ sans lever le crayon, elle est donc continue sur cet intervalle. Il en est de même sur l'intervalle $\left[5;+\infty\right[$.
Par contre, il n'est pas possible de franchir ces deux intervalles sans lever le crayon.
La fonction f n'est donc pas continue sur $\mathbb{R}$.
La fonction f est continue sur $\left]-\infty;5\right[$ et sur $\left[5;+\infty\right[$.

2) Valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires :

On considère la fonction f définie et continue sur un intervalle [a ; b].

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution dans l'intervalle [a ; b].



Ci-contre, $f(x) = k$ admet par exemple c comme solution.

- Admis -

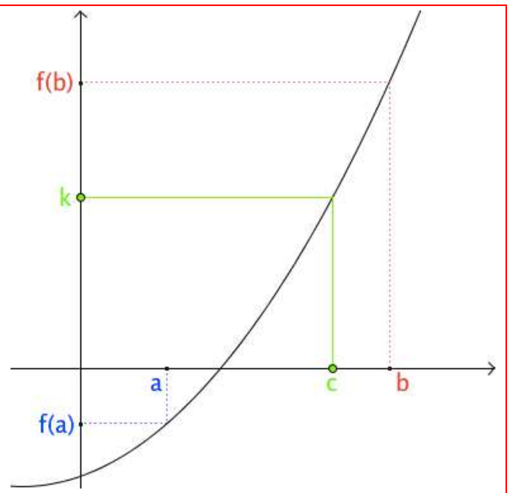
Remarque :

- Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=0$.

Corollaire :

On considère la fonction f définie, continue et strictement monotone sur un intervalle [a ; b].

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution dans l'intervalle [a ; b].



Méthode : Résolution approchée d'une équation

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2+2$.

1) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement une solution sur l'intervalle $\left[2;3\right]$.

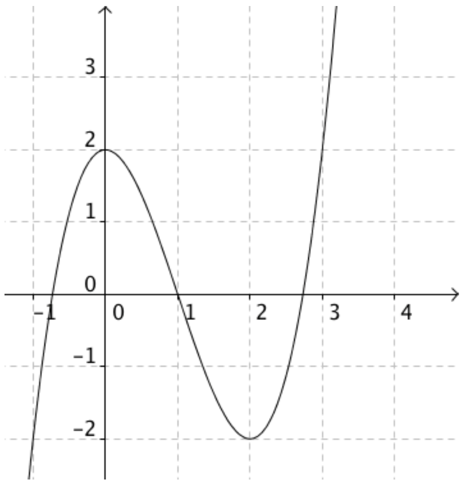
2) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution.

1) - Existence : $f(2)=2^3-3\times 2^2+2=-2$ et $f(3)=3^3-3\times 3^2+2=2$

La fonction f est continue sur l'intervalle $\left[2;3\right]$ et elle change de signe.
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel c tel que $f(c)=0$.

- <u>Unicité :</u> $f'(x)=3x^2-6x=3x\left(x-2\right)$

Donc, pour tout x de $\left[2;3\right]$, $f'(x)>0$.
La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[2;3\right]$.



- On en déduit qu'il existe un unique réel c tel que $f(c)=0$.

2) A l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des balayages successifs en augmentant la précision.

X	Y1
0	2
1	0
2	-2
3	2
4	18
5	52
6	110

La solution est comprise entre 2 et 3.

X	Y1
2	-2
2.1	-1.969
2.2	-1.872
2.3	-1.703
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704

La solution est supérieure à 2,6

X	Y1
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704
2.7	-.187
2.8	.432
2.9	1.159
3	2

La solution est comprise entre 2,7 et 2,8

X	Y1
2.7	-.187
2.71	-.1298
2.72	-.0716
2.73	-.0123
2.74	.04802
2.75	.10938
2.76	.17178

La solution est comprise entre 2,73 et 2,74.

On en déduit que $2{,}73 < c < 2{,}74$.

II. Rappels sur la dérivation

1) Formules de dérivation des fonctions usuelles :

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x)=a$, $a\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=ax$, $a\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=a$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ $n\geq 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x)=\frac{1}{x^n}$ $n\geq 1$ entier	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$\left[0;+\infty\right[$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left]0;+\infty\right[$

Exemples :

a) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^6$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=6x^5$.

b) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x)=\frac{1}{x^4}$ alors f est dérivable sur $\left]-\infty;0\right[$ et sur $\left]0;+\infty\right[$ et on a pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f'(x)=-\frac{4}{x^5}$.

2) Formules d'opération sur les fonctions dérivées

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

$u+v$ est dérivable sur I	$(u+v)'=u'+v'$
ku est dérivable sur I, où k est une constante	$(ku)'=ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)'=u'v+uv'$
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I, où u ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, où v ne s'annule pas sur I	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Exemples :

a) $f(x)=\left(2x^2-5x\right)\left(3x-2\right)$

On pose $f(x)=u(x)v(x)$ avec $u(x)=2x^2-5x \rightarrow u'(x)=4x-5$

$v(x)=3x-2 \rightarrow v'(x)=3$

Donc :

$$f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=\left(4x-5\right)\left(3x-2\right)+\left(2x^2-5x\right)\times 3$$

$$=12x^2-8x-15x+10+6x^2-15x$$

$$=18x^2-38x+10$$

b) $g(x)=\dfrac{6x-5}{x^3-2x^2-1}$

On pose $g(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=6x-5 \rightarrow u'(x)=6$

$v(x)=x^3-2x^2-1 \rightarrow v'(x)=3x^2-4x$

Donc :

$$g(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$$

$$=\frac{6\left(x^3-2x^2-1\right)-\left(6x-5\right)\left(3x^2-4x\right)}{\left(x^3-2x^2-1\right)^2}$$

$$=\frac{6x^3-12x^2-6-18x^3+24x^2+15x^2-20x}{\left(x^3-2x^2-1\right)^2}$$

$$=\frac{-12x^3+27x^2-20x-6}{\left(x^3-2x^2-1\right)^2}$$

Un logiciel de calcul formel permet de vérifier les résultats :

$\dfrac{d}{dx}\left(\left(3\cdot x^2+4\cdot x\right)\cdot\left(5\cdot x-1\right)\right)$	$45\cdot x^2+34\cdot x-4$
$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{6\cdot x-5}{x^3-2\cdot x^2-1}\right)$	$\dfrac{-\left(12\cdot x^3-27\cdot x^2+20\cdot x+6\right)}{\left(x^3-2\cdot x^2-1\right)^2}$

3) Application à l'étude des variations d'une fonction

Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.
- Si $f'(x)\le 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x)\ge 0$, alors f est croissante sur I.

Exemple :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-4x$.

Pour tout x réel, on a : $f'(x)=2x-4$.
Résolvons l'équation $f'(x)\leq 0$

$2x-4\leq 0$

$2x\leq 4$

$x\leq 2$

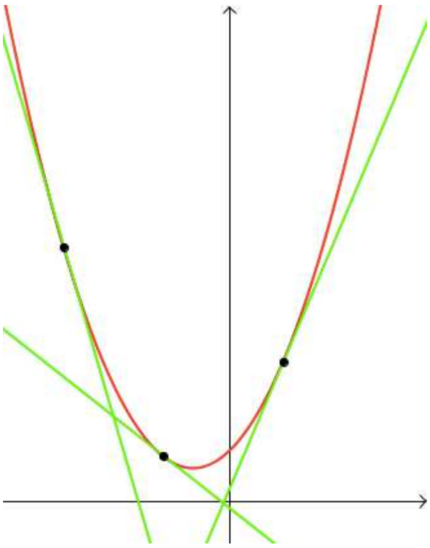
La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty;2\right]$.

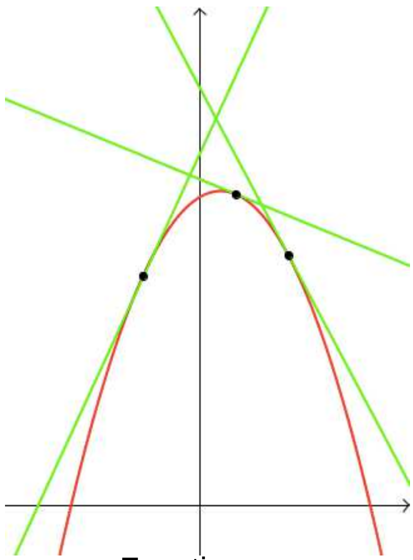
De même, on obtient que la fonction f est donc croissante sur l'intervalle $\left[2;+\infty\right[$.

III. Convexité et inflexion

1) Fonction convexe et fonction concave

Définitions : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.
La fonction f est convexe sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
La fonction f est concave sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.


Fonction convexe


Fonction concave

Propriétés :
- La fonction carré $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
- La fonction cube $x \mapsto x^3$ est concave sur $\left]-\infty,0\right]$ et convexe sur $\left[0;+\infty\right[$.
- La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est concave sur $\left]-\infty;0\right[$ et convexe sur $\left]0;+\infty\right[$.
- La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\left[0;+\infty\right[$.

- Admis -

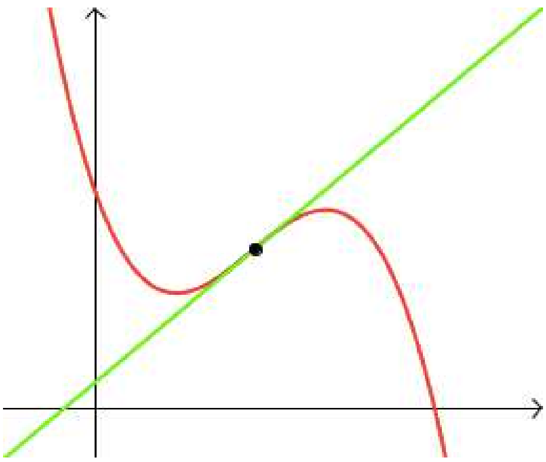
Propriété : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.
La fonction f est convexe sur I si sa dérivée f' est croissante sur I.
La fonction f est concave sur I si sa dérivée f' est décroissante sur I.

- Admis -

Exemple :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f'(x) = 6x - 2$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f''(x) = 6 > 0$.
f' est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2) Point d'inflexion

Définition : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.
Un point d'inflexion est un point où la courbe traverse sa tangente en ce point.

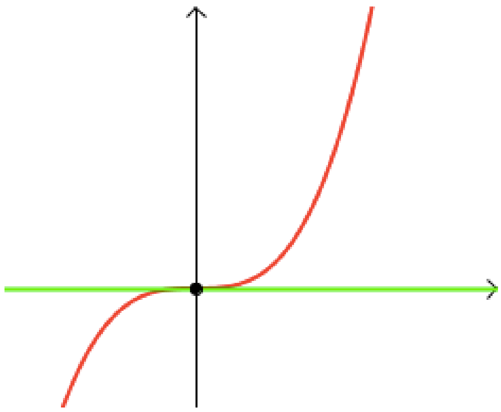


Remarque importante :
Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.

Exemple :
On considère la fonction cube $x \mapsto x^3$.
La tangente au point O(0,0) est l'axe des abscisses.

Pour $x \leq 0$, la courbe est en dessous de sa tangente.
Pour $x \geq 0$, la courbe est au-dessus de sa tangente.

La tangente à la courbe en O traverse donc la courbe.
Le point O est un point d'inflexion de la courbe de la fonction cube.

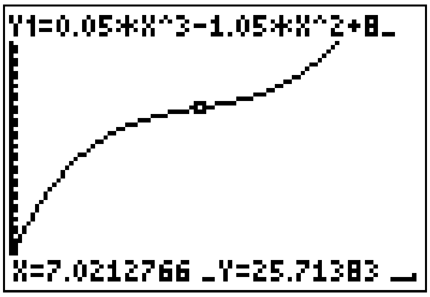


Méthode : Reconnaître un point d'inflexion

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10000 par mois. Le coût de fabrication *C* (en milliers d'euros) de x milliers de clés produites s'exprime par :
$C(x) = 0,05x^3 - 1,05x^2 + 8x + 4$.

1) À l'aide de la calculatrice graphique, évaluer la convexité de la fonction C.
En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.
2) Démontrer ces résultats.
3) Interpréter les résultats obtenus.

1) La fonction semble concave sur l'intervalle [0 ; 7] et convexe sur l'intervalle [7 ; 10]. La courbe semble posséder un point d'inflexion pour $x = 7$.



2) $C(x) = 0,05x^3 - 1,05x^2 + 8x + 4$
$C'(x) = 0,15x^2 - 2,1x + 8$
$C''(x) = 0,3x - 2,1$

Or $0,3x - 2,1 = 0$ pour $x = 7$.
On peut ainsi résumer les variations de C' et la convexité de C dans le tableau suivant :

x	0		7		10
$C''(x)$		-	0	+	
$C'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
Convexité de C		concave		convexe	

$C(7) = 25{,}7$.
Ainsi, le point de coordonnées (7 ; 25,7) est un point d'inflexion de la courbe.

3) Après le point d'inflexion, la fonction est convexe, la croissance du coût de fabrication *C* s'accélère. Avant le point d'inflexion, la fonction est concave, la croissance du coût de fabrication ralentie.
Ainsi, à partir de 7000 clés produites, la croissance du coût de fabrication s'accélère.