LES SUITES

● Inégalité de Bernoulli

$(1+a)^n \geq 1+na$, avec a>0, n$\epsilon\mathbb{N}$.

● Limites à connaître

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

● Opérations sur les limites

SOMME

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

PRODUIT ∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n =$	$L \times L'$	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

QUOTIENT ∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le quotient est $+\infty$ ou $-\infty$.

Formes indéterminées : $\infty - \infty$ $\quad 0 \times \infty \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0}$

● Limites et comparaison

- Théorèmes de comparaison :

1) Si, à partir d'un certain rang, on a : $\begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

2) Si, à partir d'un certain rang, on a : $\begin{cases} u_n \geq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

- Théorème des gendarmes :

Si, à partir d'un certain rang, on a : $\begin{cases} u_n \leq v_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$.

● Suites majorées, minorées, bornées

- La suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que : $u_n \leq M$.
- La suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que : $u_n \geq m$.
- La suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

- Si une suite est croissante et admet pour limite L, alors elle est majorée par L.

- **Théorème de convergence monotone** :
  1) Si une suite est croissante et majorée alors elle est convergente.
  2) Si une suite est décroissante et minorée alors elle est convergente.

- **Théorème de divergence** :
  1) Si une suite est croissante et non majorée alors elle tend vers $+\infty$.
  2) Si une suite est décroissante et non minorée alors elle tend vers $-\infty$.

● Suites géométriques

- (u_n) est une **suite géométrique** de raison q et de premier terme u_0.

$u_{n+1} = q \times u_n$ et $u_n = u_0 \times q^n$

- Limites :

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n\to\infty} q^n$	*Pas de limite*	0	1	$+\infty$

- $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, avec $n \,\epsilon\, \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $q \neq 1$.

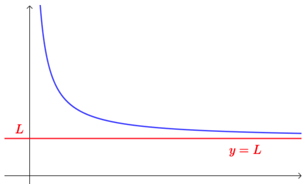
LIMITES DES FONCTIONS

● Limites à connaître

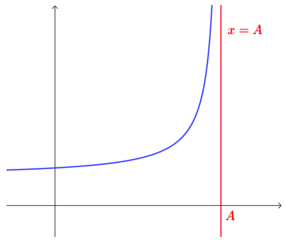
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ (pour n pair) et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ (pour n impair)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

● Asymptotes

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$:
asymptote horizontale d'équation $y = L$ en $+\infty$.



- $\lim\limits_{x \to A} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) :
asymptote verticale d'équation $x = A$.



● Opérations sur les limites

α peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

SOMME

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) + g(x) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

PRODUIT ∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) \times g(x) =$	$L \times L'$	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

QUOTIENT ∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le quotient est $+\infty$ ou $-\infty$.

Formes indéterminées : $\infty - \infty$ $\quad 0 \times \infty \quad \dfrac{\infty}{\infty} \quad \dfrac{0}{0}$

● Limites et comparaison

Théorèmes de comparaisons

1) Si on a : $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

2) Si on a : $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Théorème des gendarmes

Si on a : $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = L \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L$

● Fonction exponentielle

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

- Croissances comparées :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

DÉRIVATION

Fonction	Dérivée
a, $a \in \mathbb{R}$	0
ax, $a \in \mathbb{R}$	a
x^2	$2x$
x^n $n \geq 1$ entier	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n}$ $n \geq 1$ entier	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
e^{kx}, $k \in \mathbb{R}$	ke^{kx}
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$

Fonction	Dérivée
$u + v$	$u' + v'$
ku, $k \in \mathbb{R}$	ku'
uv	$u'v + uv'$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n avec $n \in \mathbb{Z}^*$	$nu'u^{n-1}$
e^u	$u'e^u$
$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$

- Équation de la **tangente** à la courbe de la fonction f au point d'abscisse a :
$y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

CONTINUITÉ DES FONCTIONS

● Fonctions continues

- f est **continue** en a si : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

● Théorème des valeurs intermédiaires :

Pour démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[a\,;b]$, on démontre que :

1. f est **continue** sur $[a\,;b]$,
2. f **change de signe** sur $[a\,;b]$,
3. f est **strictement monotone** sur $[a\,;b]$,

Les conditions 1 et 2 nous assurent que des solutions existent.
Avec la condition 3 en plus, nous savons que la solution est unique.

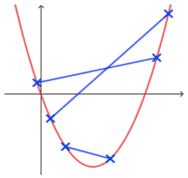
● Application à l'étude de suites

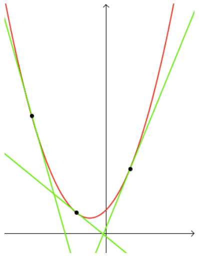
f fonction continue et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers L alors $f(L) = L$.

CONVEXITÉ

● Fonction convexe

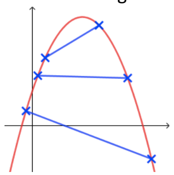
- Courbe entièrement située en dessous de ses cordes.
- Courbe entièrement située au-dessus de ses tangentes.
- f' croissante.
- $f''(x) \geq 0$.

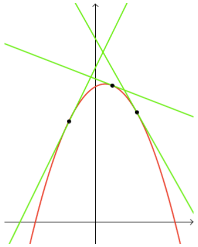




● Fonction concave

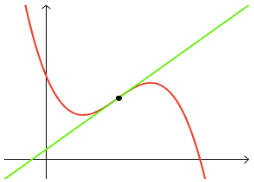
- Courbe entièrement située au-dessus de ses cordes.
- Courbe entièrement située en dessous de ses tangentes.
- f' décroissante.
- $f''(x) \leq 0$.





● Point d'inflexion

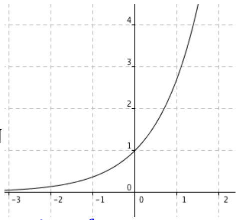
Point où la courbe traverse sa tangente.
Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.



FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

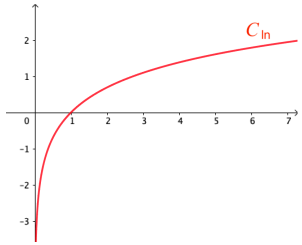
● Propriétés de la fonction exponentielle (Rappels)

- $e^0 = 1$; $e^1 = e$
- $e^x > 0$
- $e^{x+y} = e^x e^y$; $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$; $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$; $(e^x)^n = e^{nx}$, avec $n \in \mathbb{N}$
- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$; $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
- $(e^x)' = e^x$



● Propriétés de la fonction logarithme

- $\ln(1) = 0$; $\ln(e) = 1$; $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$
- Pour $x > 0$: $x = e^y \Leftrightarrow y = \ln(x)$
- $\ln(e^x) = x$
- Pour $x > 0$: $e^{\ln(x)} = x$



Pour $x > 0$ et $y > 0$:

- $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$
- $\ln(x^n) = n\ln(x)$, avec n entier relatif

- $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$ et $\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y$

●Dérivation

$(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$ et $(\ln(u(x)))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

●Limites

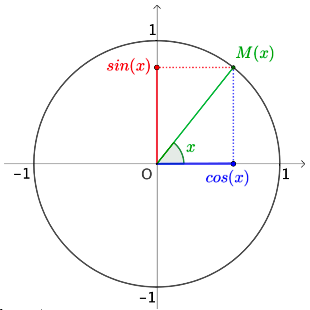
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

- **Croissances comparées** :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et pour tout entier non nul n, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$
b) $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0$

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

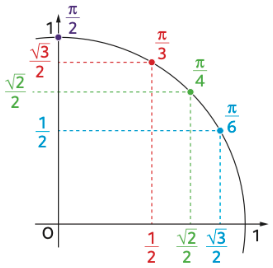
● Cercle trigonométrique



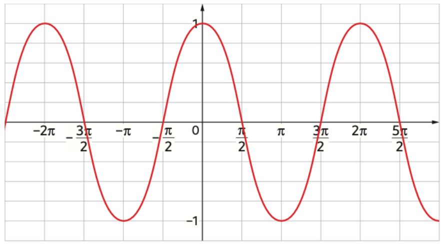
$-1 \leq \sin(x) \leq 1$ et $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

● Valeurs particulières

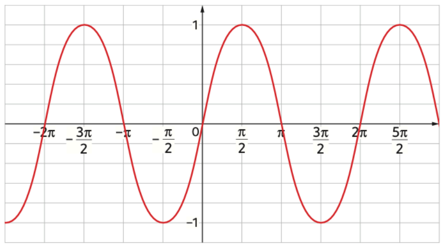
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



● Fonctions cosinus et sinus



Fonction cosinus



Fonction sinus

- **Périodicité** :
1) $\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$ où k entier relatif.
2) $\sin(x) = \sin\,(x + 2k\pi)$ où k entier relatif.
Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.

- **Parité** :
1) $\cos(-x) = \cos(x)$: La fonction cosinus est paire.
La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2) $\sin(-x) = -\sin(x)$: La fonction sinus est impaire.
La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine.

● Dérivation

Fonction	Dérivée
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(ax+b)$ a et b réels	$-a\sin(ax+b)$
$\sin(ax+b)$ a et b réels	$a\cos(ax+b)$

PRIMITIVES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

● Primitive d'une fonction

- F **primitive** de f lorsque $F' = f$.
- Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.
- Si F est une primitive de f alors $x \longmapsto F(x) + C$ est une primitive de f.

Fonction f	Une primitive F
$a,\ a \in \mathbb{R}$	ax
x^n $avec\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\,;0\}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$ avec $x > 0$	$\ln(x)$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
e^x	e^x
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$

Fonction	Une primitive
$u'u^n$ $avec\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\,;0\}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'e^u$	e^u
$\frac{u'}{u}$ $avec\ u > 0$	$\ln(u)$
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$

- **Linéarité des primitives** :
F est une primitive de f et G une primitive de g alors :
$F + G$ une primitive de $f + g$,
kF une primitive de kf, avec k réel.

\`

•Équations différentielles

- Équations différentielles du type $y' = ay$
Solutions : fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont solutions de l'équation différentielle $y' = ay$,
alors $f + g$ et kf, $k \in \mathbb{R}$, sont également solutions.

- Équations différentielles du type $y' = ay + b$
Solutions : fonctions de la forme

$$x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}, \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'équation $y' = ay$

Solution particulière constante de l'équation $y' = ay + b$

- Équations différentielles du type $y' = ay + f$
Solutions : fonctions de la forme :

$$x \mapsto Ce^{ax} + p(x), \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'équation $y' = ay$

Solution particulière de l'équation $y' = ay + f$

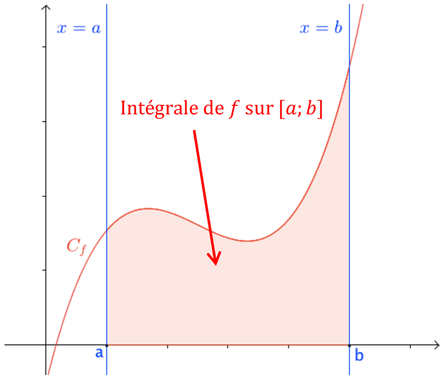
CALCUL INTÉGRAL

• Intégrale et aire

f fonction continue et positive sur $[a\,;b]$.
L'**intégrale** de f sur $[a\,;b]$, notée $\int_a^b f(x)\,dx$, est l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par :
- la courbe représentative de la fonction f,
- l'axe des abscisses,
- et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Si f est NÉGATIVE sur un intervalle $[a\,;b]$.
L'aire est égale à :

$$-\int_a^b f(x)\,dx$$



- Propriétés sur les bornes d'intégration

a) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

b) $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

c) Relation de Chasles : $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

• Intégrale et primitive

- La fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

- Si F est une primitive de f alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

• Propriétés

- Propriété de linéarité
a) Pour k réel, $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
b) $\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

- Positivité et comparaison
a) Si $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
b) Si $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

- Intégration par parties

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

• Valeur moyenne d'une fonction

Valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

COMBINATOIRE ET DÉNOMBREMENT

- Factorielle : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$

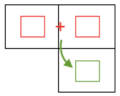
- $\binom{n}{0} = 1$ $\quad \binom{n}{n} = 1$ $\quad \binom{n}{1} = n$

- Propriété de symétrie : $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

- Propriété du triangle de Pascal : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

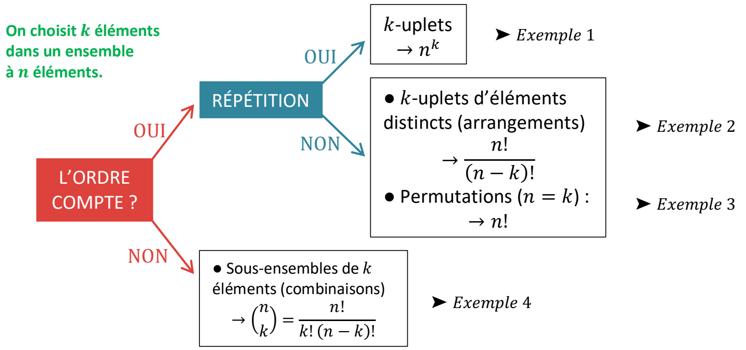
- Triangle de Pascal

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	$\binom{4}{2} = 6$	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1



- E ensemble à n éléments.
Nombre de sous-ensembles de E : $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

● Dénombrement



Exemple 1
Nombre de mots composés de 3 lettres de l'alphabet ?
ORDONNÉ - RÉPÉTITION
→ Nombre de triplets d'un ensemble à 26 éléments = 26^3.

Exemple 2
Nombre de mots composés de 3 lettres de l'alphabet toutes différentes ?
ORDONNÉ – PAS RÉPÉTITION
→ Nombre de triplets d'éléments tous distincts (arrangements) d'un ensemble à 26 éléments = $26 \times 25 \times 24$.

Exemple 3
Nombre d'anagrammes du mot « MDR ».
ORDONNÉ – PAS RÉPÉTITION
→ Nombre de permutations à 3 éléments = 3!

Exemple 4
Nombre de possibilités de tirer simultanément 3 jetons parmi 6 jetons marqués de 6 lettres toutes différentes.
NON ORDONNÉ – PAS RÉPÉTITION
→ Nombre de combinaisons à 3 éléments parmi 6 = $\binom{6}{3}$.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

● Vecteurs de l'espace

- $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$: Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$: $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

Coordonnées du milieu du segment $[AB]$: $\begin{pmatrix} \frac{x_A+x_B}{2} \\ \frac{y_A+y_B}{2} \\ \frac{z_A+z_B}{2} \end{pmatrix}$

● Produit scalaire de vecteurs de l'espace

- **Symétrie** : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$

- **Bilinéarité** : $\vec{u}\,.\,(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$ et $\vec{u}\,.\,(k\vec{v}) = k\vec{u}\,.\,\vec{v}$, avec $k \in \mathbb{R}$

- **Identités remarquables** :
$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^2$ → On peut également noter : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\,.\,\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^2$
$(\vec{u} + \vec{v})\,.\,(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

- **Formule de polarisation** :
$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$ $\quad$ $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

- **Orthogonalité** :
- $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

- Dans un repère **orthonormé** : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$: $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

● Représentation paramétrique d'une droite

Représentation paramétrique de la droite d passant par un point $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

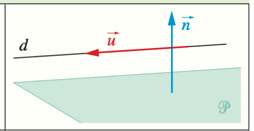
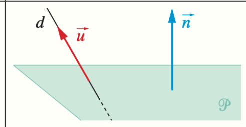
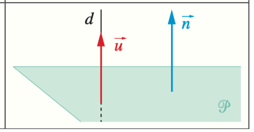
$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

● Équation cartésienne d'un plan

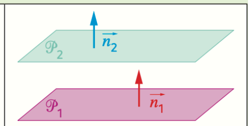
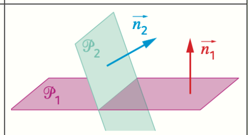
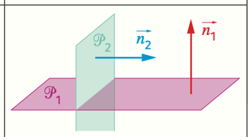
Équation cartésienne du plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$: $ax + by + cz + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

● **Positions relatives**

• d droite de vecteur directeur $\vec{u}$.
$\mathcal{P}$ plan de vecteur normal $\vec{n}$.
d et $\mathcal{P}$ sont :

parallèles	$\vec{u}\cdot\vec{n}=0$	
sécants	$\vec{u}\cdot\vec{n}\neq 0$	
orthogonaux	$\vec{u}$ et $\vec{n}$ colinéaires	

• $\mathcal{P}_1$ plan de vecteur normal $\vec{n_1}$.
$\mathcal{P}_2$ plan de vecteur normal $\vec{n_2}$.
$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont :

parallèles	$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ colinéaires	
sécants	$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ non colinéaires	
perpendiculaires	$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$	

LOI BINOMIALE

● **Probabilités conditionnelles (Rappels)**

- $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$
- $P(A)=P(B\cap A)+P(\bar{B}\cap A)$ (Formule des probabilités totales)
- A et B sont **indépendants** lorsque $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ ou $P_A(B)=P(B)$

● **Successions d'épreuves indépendantes**

On considère deux épreuves indépendantes.
Probabilité d'obtenir l'issue A pour la 1^re^ épreuve suivie de l'issue B pour la 2^e^ :
$P(A\,;B)=P(A)\times P(B)$.

● **Schéma de Bernoulli, loi binomiale**

- **Épreuve de Bernoulli** : expérience aléatoire à deux issues (succès ou échec).

- **Loi de Bernoulli** de paramètre p :
$P(X=succès)=p$ et $P(X=échec)=1-p$.
$E(X)=p\,;V(X)=p(1-p)$

- **Loi binomiale** de paramètre n et p :
Répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètre p.
Probabilités du nombre de succès de l'expérience : $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
$E(X)=np \qquad V(X)=np(1-p) \qquad \sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

LOI DES GRANDS NOMBRES

● **Somme de variables aléatoires**

- **Loi de probabilité** de la variable aléatoire somme $X+Y$:
$$P(X+Y=k)=\sum_{i+j=k}P((X=i)\cap(Y=j))$$
Avec $\boldsymbol{X}$ **et** $\boldsymbol{Y}$ **indépendantes** : $P(X+Y=k)=\sum_{i+j=k}P(X=i)\times P(Y=j)$

- $E(aX+b)=aE(X)+b \qquad V(aX+b)=a^2V(X)$

- $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ variables aléatoires indépendantes suivant une même loi.
1) $E(X_1+X_2+\dots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\dots+E(X_n)$
2) $V(X_1+X_2+\dots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+\dots+V(X_n)$

● **Moyenne d'un échantillon**

$(X_1,X_2,\dots,X_n)$ variables aléatoires indépendantes suivant une même loi.
Variable aléatoire moyenne : $M_n=\dfrac{1}{n}(X_1+X_2+\dots+X_n)$.
Espérance et variance : $E(M_n)=E(X) \qquad V(M_n)=\frac{1}{n}V(X) \qquad \sigma(M_n)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(X)$

● **Concentration, loi des grands nombres**

- **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**
Pour tout $\delta>0$: $P(|X-E(X)|\geq\delta)\leq\frac{V(X)}{\delta^2}$

- **Inégalité de concentration**
Pour tout $\delta>0$: $P(|M_n-E(X)|\geq\delta)\leq\frac{V(X)}{n\,\delta^2}$

- **Loi des grands nombres**
Pour tout $\delta>0$: $\lim\limits_{n\to+\infty}P(|M_n-E(X)|\geq\delta)=0$