LES SUITES

Le raisonnement par récurrence

Principe : Si la propriété P est : - vraie au rang n_0 (Initialisation),
- héréditaire à partir du rang n_0 (Hérédité),

alors la propriété P est vraie pour tout entier n $\geq n_0$.

Limites

Propriétés : - $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Limite d'une somme :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

Limite d'un produit :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	$L > 0$	$L < 0$	$L > 0$	$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) =$	$L\,L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Limite d'un quotient :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$L' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $v_n > 0$	0 avec $v_n > 0$	0 avec $v_n < 0$	0 avec $v_n < 0$	0	$L' > 0$	$L' < 0$	$L' > 0$	$L' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

$$"\infty - \infty", "0 \times \infty", "\frac{\infty}{\infty}" \text{ et } "\frac{0}{0}".$$

Suite géométrique

Formule de récurrence : $u_{n+1} = q \times u_n$

Formule explicite : $u_n = u_0 \times q^n$

Limite d'une suite géométrique :

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$	*pas de limite*	0	1	$+\infty$

Somme des termes d'une suite géométrique : $1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Limites et comparaison

Théorèmes de comparaison :

1) Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

2) Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Théorème d'encadrement (théorème des gendarmes) :

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$.

Suites majorées, minorées, bornées

- (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout n, $u_n \leq M$.
- (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout n, $u_n \geq m$.
- (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Théorème de convergence monotone :

- Si une suite croissante est majorée alors elle est convergente.
- Si une suite décroissante est minorée alors elle est convergente.

Corollaire :

- Si une suite croissante est non majorée alors elle tend vers $+\infty$.
- Si une suite décroissante est non minorée alors elle tend vers $-\infty$.

CONTINUITÉ ET DERIVATION

Limites

Propriétés : - $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

Définitions : - La droite d'équation $x=A$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f si $\lim\limits_{x\to A} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to A} f(x)=-\infty$.

- La droite d'équation $y=B$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=B$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=B$.

α peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel :

Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha}\left(f(x)+g(x)\right)=$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=$	L	$L>0$	$L<0$	$L>0$	$L<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha}\left(f(x)g(x)\right)=$	LL'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=$	L	L	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=$	$L'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $g(x)>0$	0 avec $g(x)>0$	0 avec $g(x)<0$	0 avec $g(x)<0$	0	$L'>0$	$L'<0$	$L'>0$	$L'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Limites et comparaisons

Théorèmes de comparaison : Si $f(x)\le g(x)$ et :

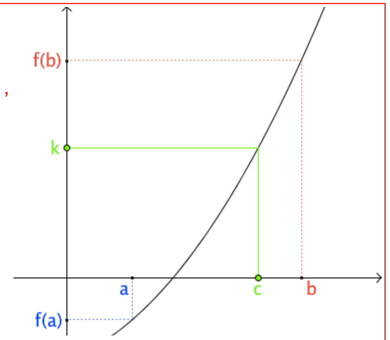
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$
- Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
- Si $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Théorème d'encadrement (théorème des gendarmes) : Si $f(x)\le g(x)\le h(x)$ et :
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=L$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=L$.

Continuité

- f est **continue en a** si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.
- f est **continue sur I** si f est continue en tout point de I.

Théorème des valeurs intermédiaires :
f est **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a\,;b]$.
Pour tout réel k **compris** entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution sur $[a\,;b]$.



Dérivabilité

On dit que la fonction f est **dérivable** en a s'il existe un nombre réel L, tel que :
$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=L$. L est appelé le **nombre dérivé** de f en a.

Définition : La **tangente** à la courbe C_f au point A est la droite passant par A de coefficient directeur le nombre dérivé L.
Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

Fonction f	Dérivée f'
$f(x)=a$, $a\in\mathbb{R}$	$f'(x)=0$
$f(x)=ax$, $a\in\mathbb{R}$	$f'(x)=a$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$
$f(x)=x^n$ $n\ge 1$ entier	$f'(x)=nx^{n-1}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
$f(x)=\frac{1}{x^n}$ $n\ge 1$ entier	$f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Fonction	Dérivée
$u+v$	$u'+v'$
ku, $k\in\mathbb{R}$	ku'
uv	$u'v+uv'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^n avec $n\in\mathbb{Z}^*$	$nu'u^{n-1}$

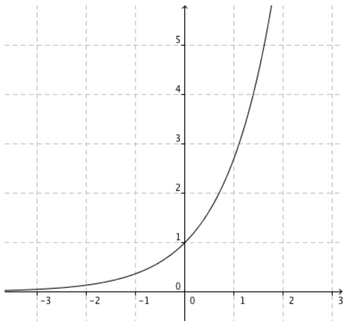
FONCTION EXPONENTIELLE

Propriétés : 1) $e^0 = 1$ et $e^1 = e$

2) $e^{x+y} = e^x e^y$, $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$,

$\left(e^x\right)^n = e^{nx}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

3) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ et $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$



Limites

Limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Propriétés de croissances comparées :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$, avec $n \in \mathbb{N}$.

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Dérivées

$(e^x)' = e^x$ et $(e^{u(x)})' = u'(x) e^{u(x)}$

FONCTION LOGARITHME

Propriétés : 1) ***ln*** est définie sur $]0;+\infty[$

2) $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$; $\ln \dfrac{1}{e} = -1$

3) $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$

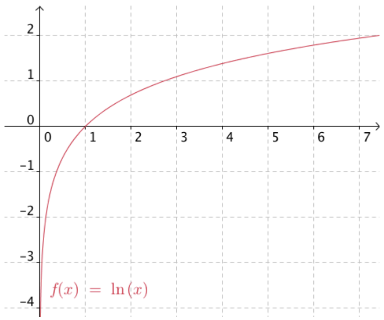
$\ln \dfrac{1}{x} = -\ln x$ et $\ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y$

4) $\ln \sqrt{x} = \dfrac{1}{2} \ln x$ et $\ln x^n = n \ln x$ avec $n \in \mathbb{Z}$

5) $y = \ln x$ *avec* $x > 0 \Leftrightarrow x = e^y$

$\ln e^x = x$ et $e^{\ln x} = x$

6) $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ et $\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$



Limites

Limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

Propriétés de croissances comparées :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$, avec $n \in \mathbb{N}$.

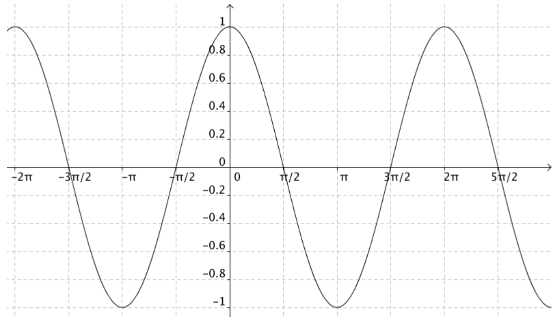
2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Dérivées

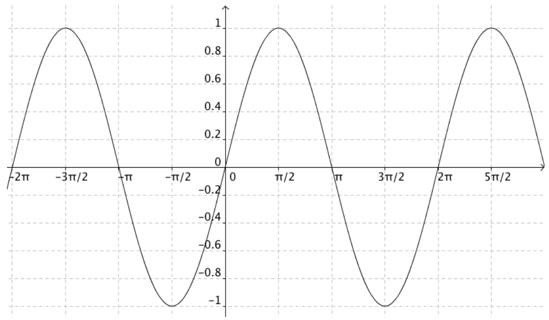
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ et $(\ln u(x))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

FONCTIONS COSINUS ET SINUS

Fonction cosinus



Fonction sinus



Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Propriétés : 1) $-1 \le \cos x \le 1$, $-1 \le \sin x \le 1$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

2) Périodicité : $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ et $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ où k entier relatif

3) Parité : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$

Dérivées

$\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos(x)$

INTEGRATION

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
On appelle **intégrale de f sur $[a\ ;\ b]$** l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

Définition : On appelle **primitive** de f sur I, une fonction F telle que $F'=f$

Fonction	Une primitive
$f(x)=a,\ a\in\mathbb{R}$	$F(x)=ax$
$f(x)=x^n$ $n\geq 0$ entier	$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x)=x^n$ $n<-1$ entier	$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln x$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x$
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x$

Fonction	Une primitive
$u'u^n$ $n\neq -1$ entier	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$
$u'e^u$	e^u
$u'\cos u$	$\sin u$
$u'\sin u$	$-\cos u$

Propriété : Si F est une primitive de f alors $x\mapsto F(x)+C$ est une primitive de f.

Propriété : $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

Propriétés : 1) $\int_a^a f(x)\,dx=0$ et $\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$

2) Relation de Chasles : $\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$

3) Linéarité : Pour k réel, $\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$

4) Si $f(x)\geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$

Si $f(x)\geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx\geq \int_a^b g(x)\,dx$

Valeur moyenne

On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a\ ;\ b]$ le nombre réel $m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

CONDITIONNEMENT

$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

Indépendance de deux événements

Définition : A et B sont **indépendants** lorsque $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

Conséquence : A et B sont indépendants lorsque $P_A(B)=P(B)$

Propriété : Si A et B sont indépendants alors $\bar{A}$ et B sont indépendants.

FLUCTUATION ET ESTIMATION

Intervalle de fluctuation

On suppose que la proportion p du caractère étudié est connue.
f est la fréquence observée sur un échantillon de taille n.

Intervalle de fluctuation au seuil 0,95 : $\left[p-1{,}96\times\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p+1{,}96\times\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.

Règle de décision :
Soit l'hypothèse : "La proportion de ce caractère dans la population est p."
Soit I l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95.
- Si $f\in I$, alors on accepte l'hypothèse faite sur la proportion p.
- Si $f\notin I$, alors on rejette l'hypothèse faite sur la proportion p.

Intervalle de confiance

On suppose que la proportion p du caractère étudié est inconnue.
f est la fréquence observée sur un échantillon de taille n.

Intervalle de confiance de la proportion p au niveau de 0,95 : $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

LOIS À DENSITÉ

Loi de probabilité à densité

Pour une **fonction de densité (ou densité)** f, on a : $P\left(X\in\left[a;b\right]\right)=\int_a^b f(t)\,dt$

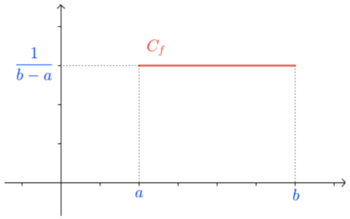
Espérance : $E(X)=\int_a^b t\,f(t)\,dt$.

Loi uniforme

Loi uniforme $U\left(\left[a;b\right]\right)$ de densité $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$

On a : $P(a\le X\le x)=\dfrac{x-a}{b-a}$

et l'espérance est égale à : $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$

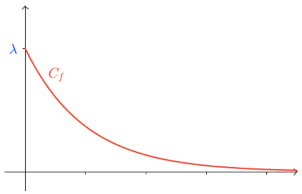


Loi exponentielle

Loi exponentielle de paramètre λ de densité $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ sur $\left[0;+\infty\right[$

On a : $P(X\le x)=1-e^{-\lambda x}$

et l'espérance est égale à : $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$



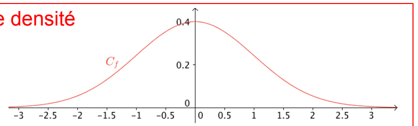
Propriété de durée de vie sans vieillissement :
X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Alors, pour tout réel t et h positifs, on a : $P_{X\ge t}(X\ge t+h)=P(X\ge h)$.

Loi normale centrée réduite

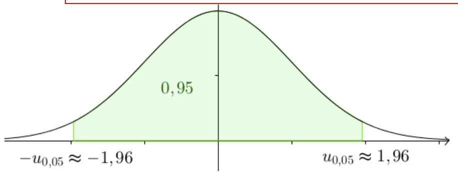
Loi normale centrée réduite $N(0;1)$ de densité

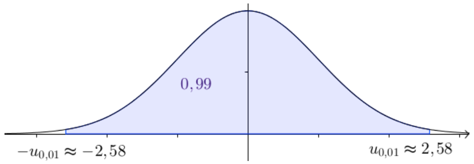
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

On a : E(X) = 0 et σ(X) = 1



Propriété : On a : $P\left(-u_\alpha\le X\le u_\alpha\right)=1-\alpha$ avec $u_{0,05}\approx 1{,}96$ et $u_{0,01}\approx 2{,}58$

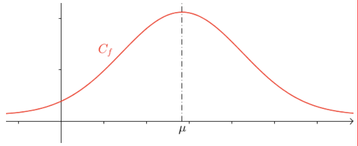




Loi normale

X suit la **loi normale** d'espérance μ et d'écart-type σ, notée $N\left(\mu;\sigma^2\right)$,

signifie que $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $N(0;1)$.



Avec la calculatrice :

1) Pour calculer par exemple : $P\left(70\le X\le 100\right)$:

Sur TI : **2nde** et **VAR/Distrib** puis saisir **normalFRéq(70,100,80,14)** ou **normalcdf(…**
Sur Casio : **OPTN** puis **STAT**, **DIST**, **NORM**, **Ncd** puis saisir **NormCD(70,100,14,80)**

2) Pour déterminer le réel t tel que par exemple $P\left(X\le t\right)=0{,}9$:

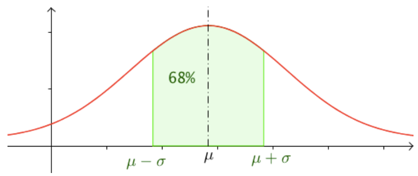
Sur TI : **2nde** et **VAR/Distrib** puis saisir **FracNormale(0.9,80,14)** ou **invNorm(…**
Sur Casio : **OPTN** puis **STAT, DIST, NORM, InvN** puis saisir **InvNormCD(0.9,14,80)**

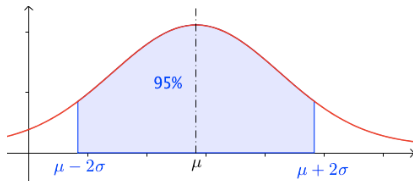
Propriétés des intervalles 1 σ, 2 σ, 3σ :

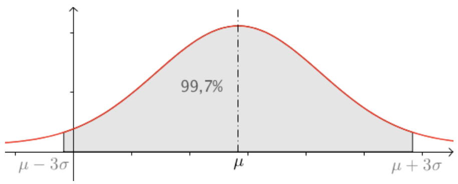
a) $P\left(\mu-\sigma\le X\le \mu+\sigma\right)\approx 0{,}683$

b) $P\left(\mu-2\sigma\le X\le \mu+2\sigma\right)\approx 0{,}954$

c) $P\left(\mu-3\sigma\le X\le \mu+3\sigma\right)\approx 0{,}997$







Théorème de Moivre-Laplace : X_n suit la loi binomiale $B\left(n;p\right)$.

Alors pour n grand, on peut considérer que $Z_n=\dfrac{X_n-E(X_n)}{\sigma(X_n)}$ suit la loi normale centrée réduite $N(0;1)$.

Rappel : Si X qui suit la loi binomiale $B\left(n;p\right)$, alors X compte le nombre de succès lors de n répétitions d'une épreuve dont la probabilité du succès est p.
On a dans ce cas : $E(X)=np$ et $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$.

NOMBRES COMPLEXES

Propriété : Deux nombres complexes sont égaux, si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Affixe

Soit le point M$(a;b)$ et le vecteur $\vec{w}\,(a;b)$.
$z=a+ib$ appelé **affixe** du point M et **affixe** du vecteur $\vec{w}$.

Propriétés : M(z_M) et N(z_N) deux points, $\vec{u}\,(z)$ et $\vec{v}\,(z')$ deux vecteurs, alors :

a) $\overrightarrow{MN}\ (z_N - z_M)$ b) $\vec{u}+\vec{v}\ (z+z')$ c) $k\vec{u}\ (kz)$, k réel d) $I\left(\frac{z_M+z_N}{2}\right)$ milieu de $[MN]$.

Conjugué

Définition : On appelle **conjugué** de $z=a+ib$, le nombre $\bar{z}=a-ib$.

Propriétés : a) $\bar{\bar{z}}=z$ b) $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}'$ c) $\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\bar{z}'$ d) $\overline{z^n}=\bar{z}^n$ e) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

f) z est réel $\Leftrightarrow z=\bar{z}$ g) z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z=-\bar{z}$

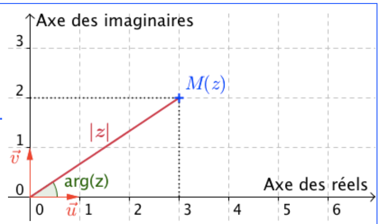
Equations du second degré dans $\mathbb{C}$

Propriété : L'équation $az^2+bz+c=0$ possède :

- deux solutions réelles distinctes $z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta = b^2-4ac > 0$,
- une unique solution réelle $z_0=-\frac{b}{2a}$ si $\Delta = 0$,
- deux solutions complexes conjuguées $z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ si $\Delta < 0$.

Module et argument

On appelle **module** de z, le nombre réel positif $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.
On appelle **argument** de z, notée arg(z) une mesure, en radians, de l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$.



Propriétés : a) $|z|^2=z\bar{z}$ b) $|\bar{z}|=|z|$ c) $|-z|=|z|$ d) $|z+z'|\le|z|+|z'|$ (inégalité triangulaire)

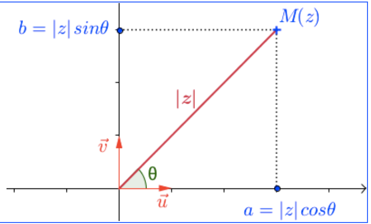
Propriétés : a) z est un nombre réel $\Leftrightarrow \arg(z)=0\,[\pi]$,

b) z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(z)=\frac{\pi}{2}\,[\pi]$.

c) $\arg(\bar{z})=-\arg(z)$ d) $\arg(-z)=\arg(z)+\pi$

Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Soit $z=a+ib$ un nombre complexe non nul.
On pose : $\theta=\arg(z)$
On a alors : $a=|z|\cos\theta$ et $b=|z|\sin\theta$.
On appelle **forme trigonométrique** de z l'écriture : $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$.



Propriétés :

Produit	$\lvert zz'\rvert=\lvert z\rvert\lvert z'\rvert$	$\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')$
Puissance	$\lvert z^n\rvert=\lvert z\rvert^n$	$\arg(z^n)=n\arg(z)$
Inverse	$\left\lvert\frac{1}{z}\right\rvert=\frac{1}{\lvert z\rvert}$	$\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)$
Quotient	$\left\lvert\frac{z}{z'}\right\rvert=\frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')$

Forme exponentielle

Définition : Pour tout réel θ, on a : $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.

Propriété : $e^{i\pi}=-1$

Tout nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ s'écrit sous sa **forme exponentielle** $z=re^{i\theta}$.

Propriétés : a) $e^{i\theta}e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$ b) $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$ c) $\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$ d) $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$ e) $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$

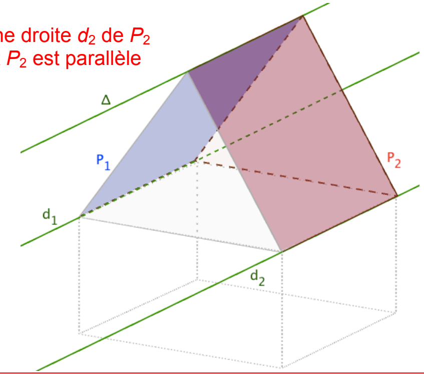
Propriétés : A, B, C, D quatre points d'affixes z_A, z_B, z_C et z_D.

1) $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB})=\arg(z_B-z_A)$ 2) $AB=|z_B-z_A|$ 3) $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD})=\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)$

ESPACE

Théorème du toit

P_1 et P_2 sont deux plans sécants.
Si une droite d_1 de P_1 est parallèle à une droite d_2 de P_2 alors la droite d'intersection Δ de P_1 et P_2 est parallèle à d_1 et d_2.



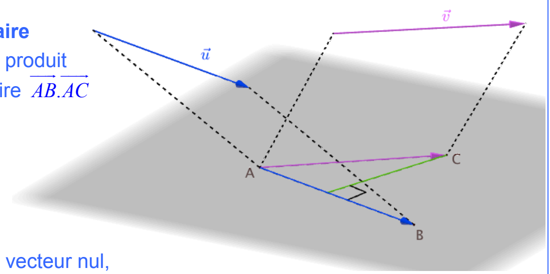
Représentation paramétrique d'une droite

Soit une droite d passant par un point $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

On appelle **représentation paramétrique** de d, le système : $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Produit scalaire de l'espace

Définition :
On appelle **produit scalaire de l'espace** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le produit $\vec{u}.\vec{v}$ égal au produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans le plan P.



On a ainsi :
- $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est un vecteur nul,
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$

Propriétés : 1) $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ 2) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ 3) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
4) $(k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$, $k \in \mathbb{R}$ 5) $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Propriété : Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace, alors :

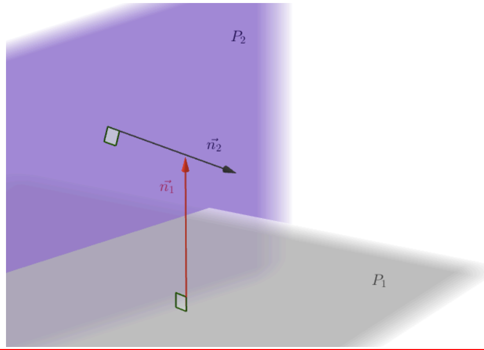
1) $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ 2) $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Equation cartésienne d'un plan

Théorèmes : 1) Un plan P de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

2) Réciproquement, si a, b et c sont non tous nuls, l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $ax + by + cz + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$, est un plan.

Propriété : Deux plans sont perpendiculaires lorsqu'un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.



MATRICES - Spé

Somme de matrices

$$\begin{pmatrix}2&3\\4&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&-3\\-3&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+5&3-3\\4-3&-1+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&0\\1&9\end{pmatrix}$$

Propriétés :
1) $A + B = B + A$
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$

Produit de matrices

$$2\begin{pmatrix}-2&5,5\\2&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times(-2)&2\times5,5\\2\times2&2\times(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&11\\4&-8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&5\\-3&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times3+5\times4\\-3\times3+1\times4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26\\-5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2&3\\1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3&-3\\4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\times3+3\times4&-2\times(-3)+3\times1\\1\times3+2\times4&1\times(-3)+2\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&9\\11&-1\end{pmatrix}$$

Propriétés :
1) $(k + k')A = kA + k'A$
2) $k(A + B) = kA + kB$
3) $(kk')A = k(k'A)$
4) $(kA)B = A(kB) = k(A \times B)$

Remarque :
$A\times B \neq B\times A$

Propriétés : 1) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$
2) $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ et $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
3) $(kA)B = A(kB) = k(A \times B)$

La **puissance n-ième** de A est la matrice, notée A^n, égale au produit de n facteurs A.

Matrice inverse

Propriété : $A\times I_n = I_n \times A = A$

Définition : Une matrice carrée A de taille n est une **matrice inversible** s'il existe une matrice B telle que $A \times B = B \times A = I_n$. La matrice $B = A^{-1}$ est la **matrice inverse** de A.

Propriété : La matrice $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $ad-bc\neq 0$.

Propriété : Soit A une matrice carrée inversible de taille n et M et N deux matrices carrées ou colonnes de taille n. On a : $A \times M = N$ SSI $M = A^{-1} \times N$

Ecriture matricielle d'un système linéaire

Le système $\begin{cases}5x+2y=16\\4x+3y=17\end{cases}$ s'écrit : $A\times X = B$ avec $A=\begin{pmatrix}5&2\\4&3\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}16\\17\end{pmatrix}$

Propriété : Si A est inversible, $A\times X = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.
Sinon le système correspondant a une infinité de solutions ou aucune solution.

Suites de matrices

Propriété : Soit une suite de matrices colonnes (U_n) de taille p telle que pour tout n, on a $U_{n+1} = AU_n$ où A est une matrice carrée de taille p. On a alors : $U_n = A^nU_0$.

Définitions : On dit qu'une suite de matrices colonnes (U_n) de taille p est **convergente** si les p suites dont les termes sont les p coefficients de (U_n) sont convergentes.
La **limite** de cette suite est la matrice colonne dont les coefficients sont les p limites obtenues.
Dans tous les autres cas, on dit que la suite est divergente.

Propriété : (U_n) est une suite de matrices colonnes de taille p définie par la relation matricielle de récurrence $U_{n+1} = AU_n + B$ où A est une matrice carrée de taille p et B est une matrice colonne à p lignes.
Si la suite (U_n) est convergente alors sa limite U est une matrice colonne vérifiant l'égalité $U = AU + B$.

Marches aléatoires

Définition : La **matrice de transition** d'une marche aléatoire est la matrice carrée dont le coefficient situé sur la ligne i et la colonne j est la probabilité de transition du sommet j vers le sommet i.

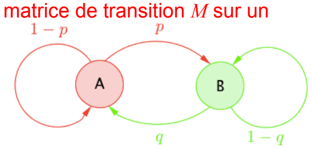
Définition : La **matrice colonne des états de la marche aléatoire après n étapes** est la matrice colonne dont les coefficients sont les probabilités d'arrivée en chaque sommet après n étapes.

Propriété : On considère une marche aléatoire de matrice de transition M et dont la matrice colonne des états à l'étape n est P_n. On a : $P_{n+1} = MP_n$ et $P_n = M^nP_0$.

Etude asymptotique d'une marche aléatoire

Définition : Si la suite (P_n) des états d'une marche aléatoire convergente vérifient $P_{n+1} = MP_n$ alors la limite P de cette suite définit un **état stable** solution de l'équation $P = MP$.

Propriété : On considère une marche aléatoire de matrice de transition M sur un graphe à deux sommets où $0<p<1$ et $0<q<1$:



Alors on a $M=\begin{pmatrix}1-p&q\\p&1-q\end{pmatrix}$ et la suite des matrices colonnes (P_n) des états de la marche aléatoire converge vers un état stable P tel que $P = MP$. P ne dépend pas de l'état initial P_0.

ARITHMÉTIQUE - Spé

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

a **divise** b s'il existe un entier relatif k tel que $b = ka$.

Propriétés : - Si a divise b et b divise c alors a divise c.
- Si c divise a et b alors c divise $ma + nb$ où m et n sont deux entiers relatifs.

Soit a un entier relatif et b entier naturel non nul.
Il existe un unique couple d'entiers $(q ; r)$ tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$.
q est appelé le **quotient** et r est appelé le **reste**.

Congruences dans $\mathbb{Z}$

Deux entiers a et b sont **congrus modulo n** lorsque $a - b$ est divisible par n.

Propriété : Deux entiers a et b sont congrus modulo n, si et seulement si, la division euclidienne de a par n a le même reste que la division euclidienne de b par n.

Propriétés : 1) $a \equiv a[n]$ 2) Si $a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n]$ alors $a \equiv c[n]$

3) Si $a \equiv b[n]$ et $a' \equiv b'[n]$ alors on a : $a + a' \equiv b + b'[n]$; $a - a' \equiv b - b'[n]$

$a \times a' \equiv b \times b'[n]$; $a^p \equiv b^p[n]$, $p \in \mathbb{N}$

PGCD

Propriétés : 1) PGCD(a ; 0) = a 2) PGCD(a ; 1) = 1
3) Si b divise a alors PGCD(a ; b) = b 4) $PGCD(ka;kb) = k \times PGCD(a;b)$
5) PGCD(a ; b) = PGCD(b ; r), avec r reste de la division de a par b.

Propriété : L'ensemble des diviseurs communs de a et b est l'ensemble des diviseurs de leur PGCD.

Nombres premiers entre eux

a et b sont **premiers entre eux** lorsque PGCD(a ; b) = 1.

Identité de Bézout : Il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv$ = PGCD(a ; b)

Théorème de Bézout : a et b sont premiers entre eux SSI il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

Théorème de Gauss : Si a divise bc et si a et b sont prem. entre eux alors a divise c.

Corollaire : Si a et b divise c et si a et b sont premiers entre eux alors ab divise c.

Nombres premiers

Un nombre entier naturel est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs positifs distincts 1 et lui-même.

Propriété : Tout entier naturel n strictement supérieur à 1 et non premier admet un diviseur premier p tel que $p \leq \sqrt{n}$.