CALCUL MATRICIEL

Le mot « matrice » vient du latin « mater » (mère). Comme on enregistrait les enfants à la naissance dans des registres, le mot désigna ces registres. Cela explique les mots « matricule » ou « immatriculation ».
Avec les mathématiciens Augustin Louis Cauchy (ci-contre) et Arthur Cayley, vers 1845, le mot prend naturellement le sens mathématique qu'on lui connaît aujourd'hui.

I. Généralités sur les matrices

Définition : Une matrice de taille m x n est un tableau de nombres formé de m lignes et n colonnes.
Une telle matrice s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Les nombres a_{ij} sont appelés les coefficients de la matrice.

Exemple :
$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille 2 x 3.

Définition : Une matrice de taille n x n est appelée une matrice carrée.

Exemple :
$B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de taille 2.

Définition : Une matrice de taille n x 1 est appelée une matrice colonne.

Exemple :
Les coordonnées d'un vecteur du plan est une matrice colonne de dimension 2 x 1.

Propriété : Deux matrices sont égales si, et seulement si, elles ont la même taille et ont les coefficients égaux placés aux mêmes positions.

II. Opérations sur les matrices

1) Somme de matrices

Définition : Soit A et B deux matrices de même taille.
La somme de A et B est la matrice, notée $A + B$, dont les coefficients sont obtenus en additionnant deux à deux des coefficients qui ont la même position dans A et B.

Exemple :

Vidéo https://youtu.be/MMBfOom_mac

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix} \text{ alors } C=A+B=\begin{pmatrix} 2+5 & 3-3 \\ 4-3 & -1+10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Remarque :
Cette définition montre qu'il n'est possible d'additionner que des matrices **de même taille**.

Propriétés : Soit A, B et C trois matrices carrées de même taille.
a) Commutativité : $A + B = B + A$
b) Associativité : $(A + B) + C = A + (B + C)$

2) Produit d'une matrice par un réel

Définition : Soit A une matrice et k un nombre réel.
La produit de A par le réel k est la matrice, notée kA, dont les coefficients sont obtenus en multipliant tous les coefficients de A par k.

Exemple :

Vidéo https://youtu.be/B3NAaW1Ap_I

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 5{,}5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \text{ alors } B=2A=\begin{pmatrix} 2\times(-2) & 2\times 5{,}5 \\ 2\times 2 & 2\times(-4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Propriétés : Soit A et B deux matrices carrées de même taille et deux réels k et k'.
a) $(k + k')A = kA + k'A$
b) $k(A + B) = kA + kB$
c) $(kk')A = k(k'A)$
d) $(kA)B = A(kB) = k(A \times B)$

3) Produit d'une matrice carrée par une matrice colonne

Définition : Soit A une matrice carrée de taille n et B une matrice colonne à n lignes telles que :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Le produit de la matrice carrée A par la matrice colonne B est la matrice colonne à n lignes, notée A x B et égale à :

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11} \times b_1 + a_{12} \times b_2 + \dots + a_{1n} \times b_n \\ a_{21} \times b_1 + a_{22} \times b_2 + \dots + a_{2n} \times b_n \\ \dots \\ a_{n1} \times b_1 + a_{n2} \times b_2 + \dots + a_{nn} \times b_n \end{pmatrix}$$

Exemple :

Vidéo https://youtu.be/nW8XRlhlq0Q

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ alors } A \times B = \begin{pmatrix} 2 \times 3 + 5 \times 4 \\ -3 \times 3 + 1 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ -5 \end{pmatrix}$$

4) Produit de deux matrices carrées

Définition : Soit A et B deux matrices de même taille.
La produit de A et B est la matrice, notée A x B, dont les colonnes correspondent au produit de la matrice A par chaque colonne de la matrice B.

Exemple :

Vidéo https://youtu.be/ZOtgQxB5NXI

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ alors :}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \times 3 + 3 \times 4 & -2 \times (-3) + 3 \times 1 \\ 1 \times 3 + 2 \times 4 & 1 \times (-3) + 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 11 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$B \times A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times (-2) + (-3) \times 1 & 3 \times 3 + (-3) \times 2 \\ 4 \times (-2) + 1 \times 1 & 4 \times 3 + 1 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -7 & 14 \end{pmatrix}$$

Remarque :

La multiplication de matrices n'est pas commutative : $A\times B\neq B\times A$

Propriétés : Soit A, B et C trois matrices carrées de même taille et un réel k.
a) Associativité : $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$
b) Distributivité : $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ et $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
c) $(kA)B = A(kB) = k(A \times B)$

5) Puissance d'une matrice carrée

Définition : Soit A une matrice carrée et n un entier naturel.
Le carré de A est la matrice, noté A^2, égale à $A \times A$.
Le cube de A est la matrice, noté A^3, égale à $A \times A \times A$.
Plus généralement, la puissance n-ième de A est la matrice, notée A^n, égale au produit de n facteurs A.

Exemple :

Vidéo https://youtu.be/r81z2eLd07w

Soit $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ une matrice diagonale.

Alors $A^2=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\times 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1\times 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4\times 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4^2 \end{pmatrix}$

En effet, on constate après calcul que tous les coefficients qui ne se trouvent pas sur la diagonale s'annulent et que sur la diagonale, les coefficients de A^2 sont égaux aux carrées des coefficients de A.
On peut généraliser cette règle à une puissance quelconque.

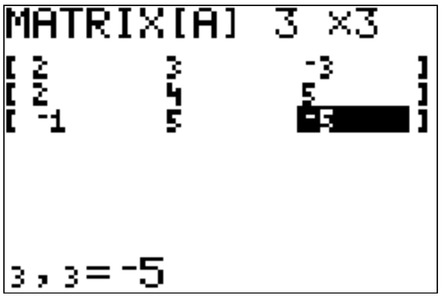
Ainsi par exemple, $A^5=\begin{pmatrix} 2^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1^5 & 0 \\ 0 & 0 & 4^5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{pmatrix}$.

Méthode : Utiliser la calculatrice pour effectuer des calculs matriciels

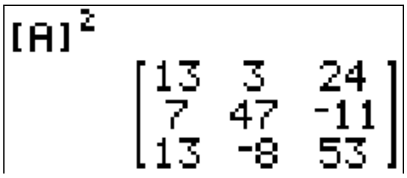
Vidéo TI https://youtu.be/8c4WDe1PSZk
Vidéo Casio https://youtu.be/zq5OHgdTw34
Vidéo HP https://youtu.be/9a_rRHablF8

On veut calculer le carré de la matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$.

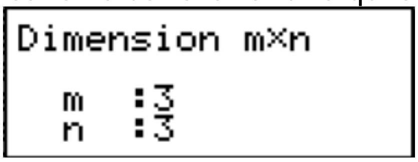
Avec une TI :
Entrer dans le mode "Matrice" (MATRIX) puis "EDIT".
Saisir la taille de la matrice puis ses coefficients.



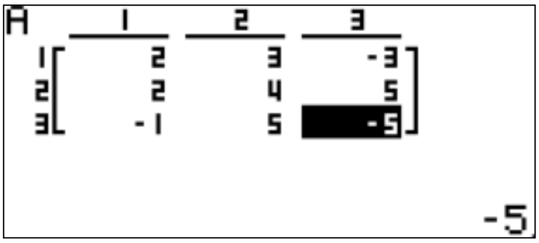
Quittez (QUIT) puis entrer à nouveau dans le mode "Matrice" et sélectionner la matrice A et compléter la formule pour élever A au carré.



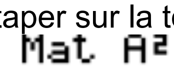
Avec une CASIO:
Entrer dans le menu "RUN.MAT" puis choisir "MAT" (Touche F1).
Choisir une matrice et saisir sa taille dans la fenêtre qui s'ouvre.



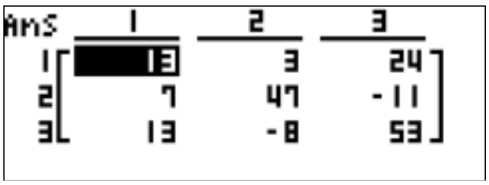
Saisir ensuite les coefficients de la matrice.



Quitter le mode d'édition (QUIT) et taper sur la touche "Mat" puis saisir le calcul.



On obtient le résultat :



III. Matrice inverse

1) Matrice unité

Définition : On appelle matrice unité de taille n la matrice carrée formée de n lignes et n colonnes :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Propriété : Pour toute matrice carrée A de taille n, on a : $A \times I_n = I_n \times A = A$

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ alors :

$$A \times I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 1+(-2)\times 0 & 3\times 0+(-2)\times 1 \\ 1\times 1+4\times 0 & 1\times 0+4\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2) Matrice inverse d'une matrice carrée

Définition : Une matrice carrée A de taille n est une matrice inversible s'il existe une matrice B telle que A x B = B x A = I_n.
La matrice B, notée A^{-1} est appelée la matrice inverse de A.

Exemple :

Vidéo https://youtu.be/FAvptVYvfb0

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ -0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ -0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 0,2+(-1)\times(-0,4) & 3\times 0,2+(-1)\times 0,6 \\ 2\times 0,2+1\times(-0,4) & 2\times 0,2+1\times 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrices A et B sont donc inverses l'une de l'autre.

Remarque :
Toutes les matrices ne sont pas inversibles.

Vidéo https://youtu.be/pHlepnbQaCQ

Propriété : La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$.

Démonstration :

Soit $B=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Alors $A\times B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}=(ad-bc)I_2$.

Si $ad-bc\neq 0$, on a $\frac{1}{ad-bc}A\times B=I_2$ soit $A\times\left(\frac{1}{ad-bc}B\right)=I_2$ donc A est inversible.

Si $ad-bc=0$, alors $A\times B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc A n'est pas inversible. Car si A était inversible d'inverse la matrice C, on aurait $C\times A\times B=I_2\times B=B$ et

$C\times A\times B=C\times\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Et donc $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ce qui est impossible.

Méthode : Calculer l'inverse d'une matrice carrée de taille 2

Vidéo https://youtu.be/4QMzwWY6T7g

Calculer l'inverse de la matrice $C=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On a : $C\times C^{-1}=I_2$ soit $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc : $\begin{pmatrix} 2c & 2d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Et donc : $\begin{cases} 2c=1 \\ 2d=0 \\ a+2c=0 \\ b+2d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\frac{1}{2} \\ d=0 \\ a+2\times\frac{1}{2}=0 \\ b+2\times 0=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\frac{1}{2} \\ d=0 \\ a=-1 \\ b=1 \end{cases}$

D'où $C^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

On peut vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice :

Il est possible de faire une saisie en ligne sans passer par le menu "Matrice".

```
[[0,2][1,2]]⁻¹
```

On obtient l'affichage suivant et le résultat :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ .5 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Propriété :</u> Soit A une matrice carrée inversible de taille n et M et N deux matrices carrées ou colonnes de taille n. On a :
A x M = N, si et seulement si, $M = A^{-1}$ x N

<u>Démonstration :</u>
A x $M = N \Leftrightarrow A^{-1}$ x (A x M) = A^{-1} x N
Comme A^{-1} x (A x M) = (A^{-1} x A) x M = I_n x M = M, on a :
$M = A^{-1}$ x N

<u>Méthode :</u> Résoudre une équation matricielle

Vidéo https://youtu.be/4-7I11_p7zM

Déterminer la matrice colonne X vérifiant $AX = X + B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- On a : $AX = X + B$
$\Leftrightarrow AX - X = B$
$\Leftrightarrow (A - I_2)X = B$

- Calculons $C = A - I_2$ et démontrons que cette matrice est inversible :
$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Or, $0 \times 2 - 1 \times 2 = -2 \neq 0$ donc C est inversible.

Ainsi, on a : $X = C^{-1} \times B$.

- Dans la méthode précédente, on a calculé l'inverse C^{-1} de la matrice C :
$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

- Ainsi, $X=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1\times(-1)+1\times 2 \\ \frac{1}{2}\times(-1)+0\times 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

IV. Ecriture matricielle d'un système linéaire

Exemple :

On considère le système (S) suivant : $\begin{cases} 5x+2y=16 \\ 4x+3y=17 \end{cases}$

On pose : $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix}$.

On a alors : $A\times X=\begin{pmatrix} 5x+2y \\ 4x+3y \end{pmatrix}$

Ainsi, le système peut s'écrire $A\times X=B$

Propriété : Soit A une matrice carrée inversible de taille n et B une matrice colonne à n lignes.
Alors le système linéaire d'écriture matricielle $A\times X=B$ admet une unique solution donnée par la matrice colonne $A^{-1}B$.

Démonstration :
$A\times X=B$ alors $X=A^{-1}B$.

Remarque :
Dans le contexte de la propriété précédente, si A n'est pas inversible alors le système correspondant possède une infinité de solutions ou aucune solution.

Méthode : Résoudre un système à l'aide des matrices

Vidéo https://youtu.be/vhmGn_x7UZ4

Résoudre le système (S) suivant : $\begin{cases} 5x+2y=16 \\ 4x+3y=17 \end{cases}$.

On a vu plus haut qu'en posant $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix}$.

Le système peut s'écrire sous forme matricielle : $A\times X=B$.

En calculant l'inverse de la matrice A, on a $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{-4}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$.

Ainsi $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{-4}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Le système a donc pour solution le couple (x ; y) = (2 ; 3).