OPERATIONS SUR LES FONCTIONS

I. Fonction associée $u + k$

Exemples :

- Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2$

Alors la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 5$ est la fonction $u + 5$.

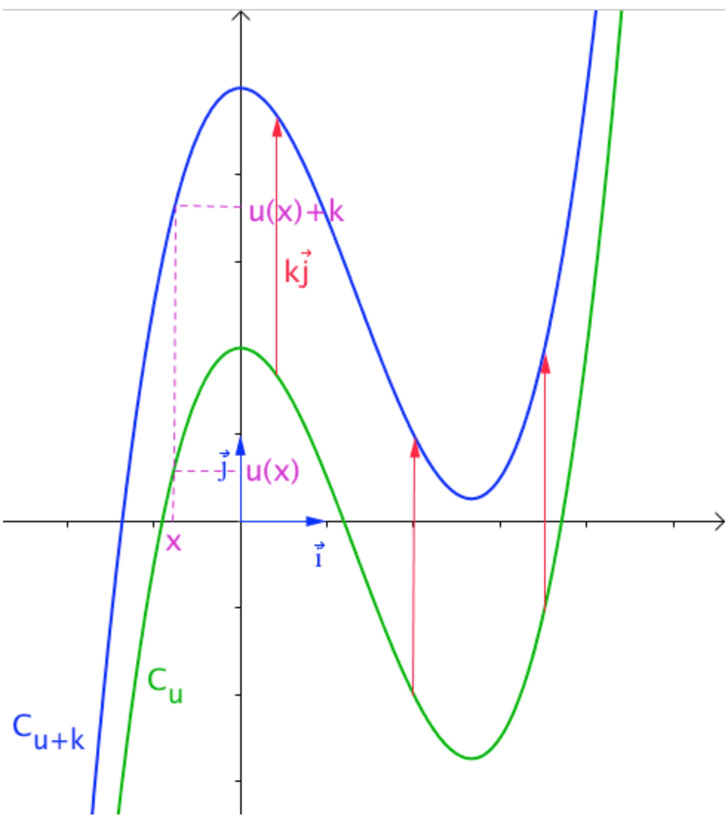
- Soit v la fonction définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $v(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + x$.

Alors la fonction $v - 3$ est définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $(v-3)(x) = v(x) - 3 = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + x - 3$

Propriété : Soit un réel k et une fonction monotone u définie sur intervalle I.
Les fonctions $u + k$ et u ont le même sens de variation sur I.

Démonstration :
- u est croissante sur I signifie que pour tout réel a et b de I tels que $a < b$, on a $u(a) \le u(b)$.
On ajoute k au deux membres de l'égalité et on a : $u(a) + k \le u(b) + k$, soit :
$\left(u+k\right)(a) \le \left(u+k\right)\left(b\right)$. Ce qui signifie que $u + k$ est croissante sur I.
- La démonstration est analogue pour la décroissance.

Dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, la courbe représentative de la fonction $u + k$ est l'image de la courbe représentative de la fonction u par la translation de vecteur $k\vec{j}$.



II. Fonction associée *k u*

Exemples :
- Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3$
Alors la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto 2x^3$ est la fonction $2u$.

- Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = x + 1$.
Alors la fonction $3v$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $(3v)(x) = 3v(x) = 3(x+1) = 3x + 3$

Propriété : Soit un réel k et une fonction monotone u définie sur intervalle I.
- Si $k > 0$: Les fonctions $k\,u$ et u ont le même sens de variation sur I.
- Si $k < 0$: Les fonctions $k\,u$ et u ont des sens de variation contraire sur I.

Démonstration dans le cas où u croissante et $k < 0$:
u est croissante sur I signifie que pour tout réel a et b de I tels que $a < b$, on a $u(a) \leq u(b)$.
On multiplie les deux membres de l'égalité par k et on a : $ku(a) \geq ku(b)$ car $k < 0$.
Soit : $(ku)(a) \geq (ku)(b)$. Ce qui signifie que ku est décroissante sur I.

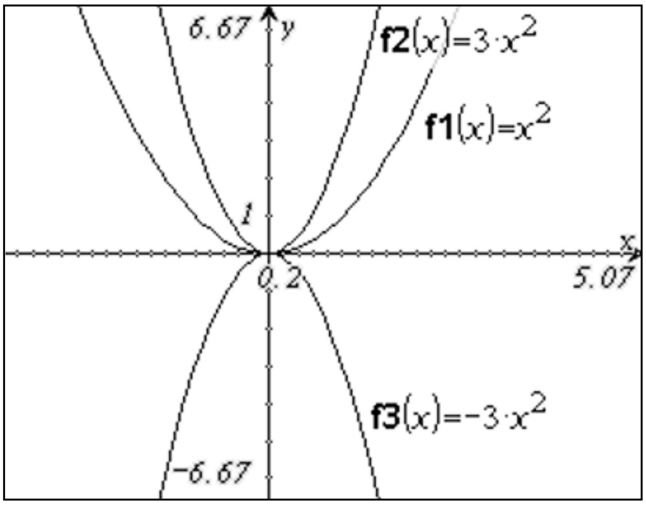
Exemple :

On représente à l'aide la calculatrice les fonctions f_1, f_2 *et* f_3 telles que :

$f_1(x) = x^2$

$f_2(x) = 3x^2$

$f_3(x) = -3x^2$



Pour une même abscisse, un point de la courbe représentative de f_2 possède une ordonnée égale au triple de l'ordonnée du point de la courbe de f_1.
Les courbes représentatives de f_2 et de f_3 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

III. Fonction associée $\sqrt{u}$

Exemples :

- Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 2 + x^2$

Alors la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{2+x^2}$ est la fonction $\sqrt{u}$.

- Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = |x| + 1$.

Alors la fonction $\sqrt{v}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\left(\sqrt{v}\right)(x) = \sqrt{v(x)} = \sqrt{|x|+1}$

Propriété : Soit une fonction monotone u définie sur intervalle I telle que pour tout x de I, $u(x) \geq 0$.
Les fonctions $\sqrt{u}$ et u ont le même sens de variation sur I.

Démonstration :

- u est croissante sur I et à valeurs positives signifie que pour tout réel a et b de I tels que $a < b$, on a $0 \leq u(a) \leq u(b)$.

La fonction racine carrée est croissante sur $\left[0;+\infty\right[$ donc on a : $\sqrt{u(a)} \leq \sqrt{u(b)}$, soit :
$\left(\sqrt{u}\right)(a) < \left(\sqrt{u}\right)(b)$. Ce qui signifie que $\sqrt{u}$ est croissante sur I.

- La démonstration est analogue pour la décroissance.

Méthode : Déterminer les variations d'une fonction à l'aide d'une fonction associée

Vidéo https://youtu.be/GztMvGWNhDM

Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2x-6}$ est croissante sur l'intervalle $\left[3;+\infty\right[$.

La fonction u définie sur $\left[3;+\infty\right[$ par $u(x) = 2x - 6$ est positive et strictement croissante sur cet intervalle.

On en déduit que la fonction $\sqrt{u} = f$ est également strictement croissante sur $\left[3;+\infty\right[$.

IV. Fonction associée $\frac{1}{u}$

Exemple :
- Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=3x^2+1$

Alors la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{3x^2+1}$ est la fonction $\frac{1}{u}$.

- Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x)=-\sqrt{x^2+1}$.

Alors la fonction $\frac{1}{v}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $\left(\frac{1}{v}\right)(x)=\frac{1}{v(x)}=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Propriété : Soit une fonction monotone u définie sur intervalle I sur lequel u a un signe constant et ne s'annule pas.

Les fonctions $\frac{1}{u}$ et u ont des sens de variation contraire sur I.

Démonstration pour u croissante et à valeurs strictement positive :
u est croissante sur I et à valeurs strictement positives signifie que pour tout réel a et b de I tels que $a < b$, on a $0 < u(a) \leq u(b)$.

La fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$, donc on a : $0 < \frac{1}{u(b)} \leq \frac{1}{u(a)}$, soit :

$0 < \left(\frac{1}{u}\right)(a) \leq \left(\frac{1}{u}\right)(b)$. Ce qui signifie que $\frac{1}{u}$ est décroissante sur I.

Méthode : Déterminer les variations d'une fonction à l'aide de fonctions associées

Vidéo https://youtu.be/2jm-_Obh5C4

1) Démontrer que la fonction g définie par $g(x)=\frac{1}{2-x}$ est croissante sur l'intervalle $]2;+\infty[$.

2) Démontrer que la fonction h définie par $h(x)=\frac{-2}{x}+1$ est croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

1) La fonction u définie sur $]2;+\infty[$ par $u(x)=2-x$ est négative et strictement décroissante sur cet intervalle.

On en déduit que la fonction $\frac{1}{u}=f$ est strictement croissante sur $]2;+\infty[$.

2) La fonction u définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $u(x)=\frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur cet intervalle.
La fonction $-2u$ est donc strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$ et donc la fonction $-2u+1=f$ est strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$.

© Copyright

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.
www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales