LE PAYS MAUDIT

*Commentaire : Etude d'un exemple de chaîne de Markov.*

Au *Pays Maudit*, la météo est assez simple : soit il fait beau (noté B), soit il pleut (noté P) ou soit il grêle (noté G).

Le temps passe d'un état à un autre en respectant invariablement les règles suivantes :

* S’il fait beau un jour, il ne fera pas beau le lendemain et il y a autant de chances qu'il pleuve ou qu'il grêle.
* S’il pleut ou s’il grêle, il y a une chance sur deux qu’il fasse le même temps le lendemain et une chance sur quatre qu’il fasse beau le lendemain.

1) S'il grêle aujourd’hui, quel temps fera-t-il demain ? Répondre en utilisant un arbre de probabilité.

2) Compléter le graphe probabiliste ci-contre résumant la situation.

3) On note $b\_{n}$, $p\_{n}$ et $g\_{n}$ les probabilités respectives qu'au énième jour il fasse beau avec une probabilité $b\_{n}$, qu'il pleuve avec une probabilité $p\_{n}$ et qu'il grêle avec une probabilité $g\_{n}$.

Construire un arbre de probabilité résumant les probabilités de transition du jour $n$ au jour $n+1$.

4) a) On note $J\_{n}=\left(\begin{matrix}b\_{n}&p\_{n}&g\_{n}\end{matrix}\right)$ la matrice ligne des probabilités au jour $n$.

Déterminer la matrice de transition $T$ telle que $J\_{n+1}=J\_{n}×T$.

 b) Vérifier que$\left(\begin{matrix}0&0&1\end{matrix}\right)×T=\left(\begin{matrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{matrix}\right)$ puis donner une interprétation de ce résultat.

 c) À l’aide d’un produit matriciel, prévoir le temps du surlendemain.

5) a) À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, calculer les premières puissances de la matrice de transition et vérifier que ces puissances semblent converger vers la matrice limite :

$$\left(\begin{matrix}\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&\frac{2}{5}\end{matrix}\right)$$

 b) En admettant ce résultat, en déduire le temps au *Pays Maudit* à longue échéance.

 *Exercice inspiré d'un travail du Groupe Graphes de l'Irem de Strasbourg*

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)