

# LE PAYS MAUDIT



Commentaire : Etude d'un exemple de marche aléatoire.

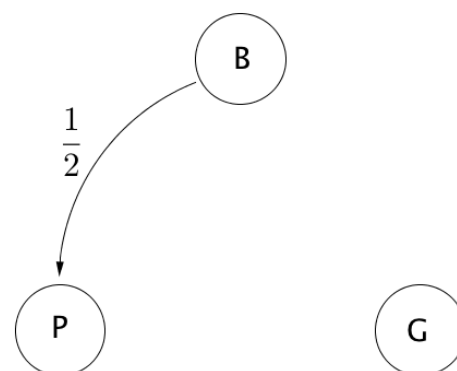
Au *Pays Maudit*, la météo est assez simple : soit il fait beau (noté B), soit il pleut (noté P) ou soit il grêle (noté G).

Le temps passe d'un état à un autre en respectant invariablement les règles suivantes :

- S'il fait beau un jour, il ne fera pas beau le lendemain et il y a autant de chances qu'il pleuve ou qu'il grêle.
- S'il pleut ou s'il grêle, il y a une chance sur deux qu'il fasse le même temps le lendemain et une chance sur quatre qu'il fasse beau le lendemain.

1) S'il grêle aujourd'hui, quel temps fera-t-il demain ? Répondre en utilisant un arbre de probabilité.

2) Compléter le graphe probabiliste ci-contre résumant la situation.



3) On note  $b_n$ ,  $p_n$  et  $g_n$  les probabilités respectives qu'au  $n$ ème jour il fasse beau avec une probabilité  $b_n$ , qu'il pleuve avec une probabilité  $p_n$  et qu'il grêle avec une probabilité  $g_n$ .

Construire un arbre de probabilité résumant les probabilités de transition du jour  $n$  au jour  $n + 1$ .

4) a) On note  $J_n = (b_n \quad p_n \quad g_n)$  la matrice ligne des probabilités au jour  $n$ . Déterminer la matrice de transition  $T$  telle que  $J_{n+1} = J_n \times T$ .

b) Vérifier que  $(0 \quad 0 \quad 1) \times T = \left(\frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}\right)$  puis donner une interprétation de ce résultat.

c) À l'aide d'un produit matriciel, prévoir le temps du surlendemain.

5) a) À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, calculer les premières puissances de la matrice de transition et vérifier que ces puissances semblent converger vers la matrice limite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

b) En admettant ce résultat, en déduire le temps au *Pays Maudit* à longue échéance.

*Exercice inspiré d'un travail du Groupe Graphes de l'Irem de Strasbourg*



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)

Yvan Monka – Académie de Strasbourg – [www.maths-et-tiques.fr](http://www.maths-et-tiques.fr)