# PRODUIT SCALAIRE

La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique. Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIXe siècle par le mathématicien allemand *Hermann Grassmann* (1809 ; 1877), ci-contre.
Il fut baptisé produit scalaire par *William Hamilton* (1805 ; 1865) en 1853.

## I. Définition et propriétés

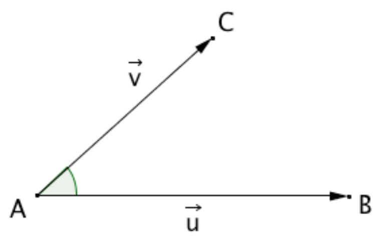
### 1) Norme d'un vecteur

Définition : Soit un vecteur $\vec{u}$ et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.

### 2) Définition du produit scalaire

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel définit par :
- $\vec{u}.\vec{v} = 0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$, dans le cas contraire.

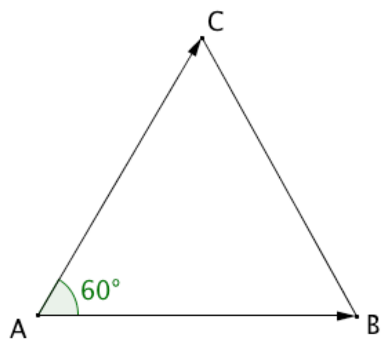
$\vec{u}.\vec{v}$ se lit "$\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$".




Remarque :
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux représentants des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors :
$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \widehat{BAC}$

Exemple :

**Vidéo** https://youtu.be/CJxwKG4mvWs




Soit un triangle équilatéral ABC de côté $a$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos\widehat{BAC}$

$= a \times a \times \cos 60°$

$= a^2 \times 0,5$

$= \dfrac{a^2}{2}$

Attention : Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. Ecrire par exemple $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$ est une maladresse à éviter !

### 3) Propriété de symétrie du produit scalaire

Propriété : Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

Démonstration :

On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls (démonstration évidente dans la cas contraire).

$\vec{u}.\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$

$= \left\|\vec{v}\right\| \times \left\|\vec{u}\right\| \times \cos\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$

$= \left\|\vec{v}\right\| \times \left\|\vec{u}\right\| \times \cos\left(-\left(\vec{v}\,;\vec{u}\right)\right)$

$= \left\|\vec{v}\right\| \times \left\|\vec{u}\right\| \times \cos\left(\vec{v}\,;\vec{u}\right)$

$= \vec{v}.\vec{u}$

### 4) Opérations sur les produits scalaires

Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

1) $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$  2) $\vec{u}.\left(k\vec{v}\right) = k\vec{u}.\vec{v}$, avec $k$ un nombre réel.

*- Admis -*

### 5) Identités remarquables

Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

1) $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

2) $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

3) $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

Démonstration pour le 2) :

$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$

$=\vec{u}.\vec{u}-\vec{u}.\vec{v}-\vec{v}.\vec{u}+\vec{v}.\vec{v}$

$=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

## II. Produit scalaire et norme

Soit un vecteur $\vec{u}$, on a :

$\vec{u}.\vec{u}=\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{u}\right\|\times\cos\left(\vec{u};\vec{u}\right)=\left\|\vec{u}\right\|^2\times\cos 0=\left\|\vec{u}\right\|^2$

et

$\vec{u}.\vec{u}=\vec{u}^2$

On a ainsi : $\vec{u}^2=\vec{u}.\vec{u}=\left\|\vec{u}\right\|^2$

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

$\vec{u}.\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2\right)$ et $\vec{u}.\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2\right)$

Démonstration de la première formule :

$\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2$

$=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

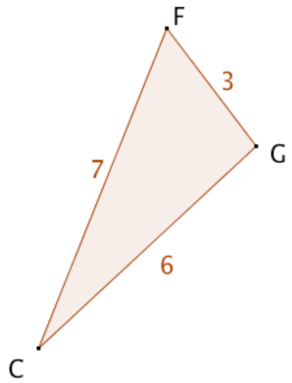
$=\left\|\vec{u}\right\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2$

donc $\vec{u}.\vec{v}=\dfrac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2\right)$

Propriété : Soit A, B et C trois points du plan. On a :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

Démonstration :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)$
$=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2\right)$
$\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

Exemple :
Vidéo https://youtu.be/GHPvfaHnysg




$\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\left(CG^2+CF^2-GF^2\right)$
$=\frac{1}{2}\left(6^2+7^2-3^2\right)$
$=38$

## III. Produit scalaire et orthogonalité

### 1) Vecteurs orthogonaux

Propriété : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=0$.

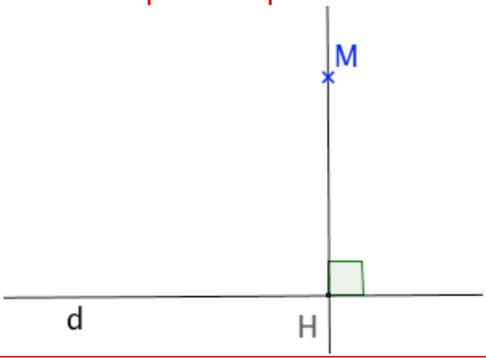
Démonstration :

Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente.
Supposons le contraire.

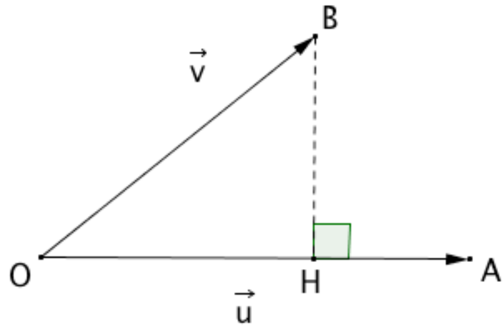
$\vec{u}.\vec{v}=0$
$\Leftrightarrow\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$
$\Leftrightarrow\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=0$
$\Leftrightarrow$ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

## 2) Projection orthogonale

Définition : Soit une droite *d* et un point M du plan.
Le projeté orthogonal du point M sur la droite *d* est le point d'intersection H de la droite *d* avec la perpendiculaire à *d* passant par M.




Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).
On a : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$




Démonstration :

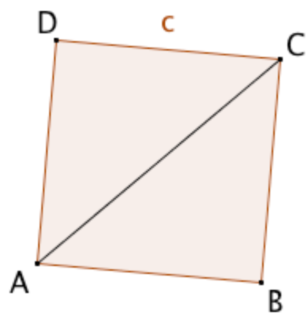
$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB}\right)$$
$$= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{HB}$$
$$= \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$$

En effet, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{HB} = 0$.

Exemple :

**Vidéo** https://youtu.be/2eTsaa2vVnI

Soit un carré ABCD de côté c.



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$$
$$= \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$$
$$= c^2$$

## IV. Produit scalaire dans un repère orthonormé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\left(x\,;y\right)$ et $\left(x'\,;y'\right)$.
On a : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

Démonstration :

$$\vec{u}.\vec{v} = \left(x\vec{i} + y\vec{j}\right).\left(x'\vec{i} + y'\vec{j}\right)$$
$$= xx'\vec{i}.\vec{i} + xy'\vec{i}.\vec{j} + yx'\vec{j}.\vec{i} + yy'\vec{j}.\vec{j}$$
$$= xx'\left\|\vec{i}\right\|^2 + xy'\vec{i}.\vec{j} + yx'\vec{j}.\vec{i} + yy'\left\|\vec{j}\right\|^2$$
$$= xx' + yy'$$

car $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 1$, le repère étant normé,

et $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{i} = 0$ le repère étant orthogonal.

Exemple :

**Vidéo** https://youtu.be/aOLRbG0libY

**Vidéo** https://youtu.be/cTtV4DsoMLQ

Soit $\vec{u}\left(5;-4\right)$ et $\vec{v}\left(-3;7\right)$ deux vecteurs.

$$\vec{u}.\vec{v} = 5\times\left(-3\right) + \left(-4\right)\times 7 = -15 - 28 = -43$$