SECOND DEGRE (Partie 2)

I. Résolution d'une équation du second degré

Définition : Une équation du second degré est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.
Une solution de cette équation s'appelle une racine du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemple :
L'équation $3x^2 - 6x - 2 = 0$ est une équation du second degré.

Définition : On appelle discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel, noté Δ, égal à $b^2 - 4ac$.

Exemple : Le discriminant de l'équation $3x^2 - 6x - 2 = 0$ est :
$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 36 + 24 = 60$. En effet, a = 3, b = -6 et c = -2.

Propriété : Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.
- Si Δ < 0 : L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.
- Si Δ = 0 : L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si Δ > 0 : L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Admis -

Méthode : Résoudre une équation du second degré

Vidéo https://youtu.be/youUIZ-wsYk
Vidéo https://youtu.be/RhHheS2Wpyk
Vidéo https://youtu.be/v6fI2RqCCiE

Résoudre les équations suivantes :

a) $2x^2 - x - 6 = 0$ b) $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$ c) $x^2 + 3x + 10 = 0$

a) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$:
a = 2, b = -1 et c = -6 donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$.

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times 2} = -\frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times 2} = 2$$

b) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$:

a = 2, b = -3 et c = $\frac{9}{8}$ donc Δ = b² – 4ac = (-3)² – 4 x 2 x $\frac{9}{8}$ = 0.

Comme Δ = 0, l'équation possède une unique solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2\times 2} = \frac{3}{4}$$

c) Calculons le discriminant de l'équation $x^2 + 3x + 10 = 0$:

a = 1, b = 3 et c = 10 donc Δ = b² – 4ac = 3² – 4 x 1 x 10 = -31.

Comme Δ < 0, l'équation ne possède pas de solution réelle.

II. Factorisation d'un trinôme

Propriété : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur ℝ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si Δ = 0 : Pour tout réel x, on a : $f(x) = a(x - x_0)^2$.
- Si Δ > 0 : Pour tout réel x, on a : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

- Admis -

Remarque : Si Δ < 0, on n'a pas de forme factorisée de f.

Méthode : Factoriser un trinôme

Vidéo https://youtu.be/eKrZK1lisc8

Factoriser les trinômes suivants : a) $4x^2 + 19x - 5$ b) $9x^2 - 6x + 1$

a) On cherche les racines du trinôme $4x^2 + 19x - 5$:

Calcul du discriminant : Δ = 19² – 4 x 4 x (-5) = 441

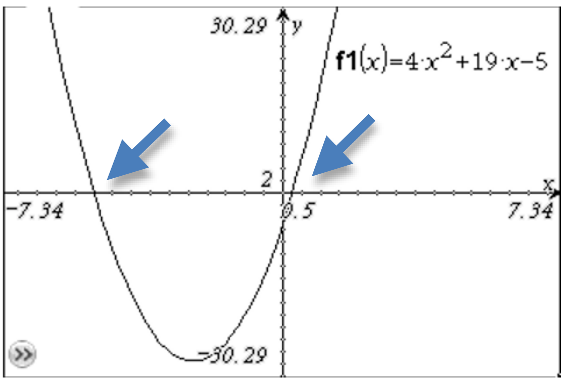
Les racines sont : $x_1 = \frac{-19 - \sqrt{441}}{2\times 4} = -5$

et $x_2 = \frac{-19 + \sqrt{441}}{2\times 4} = \frac{1}{4}$

On a donc :

$$4x^2 + 19x - 5 = 4(x - (-5))\left(x - \frac{1}{4}\right).$$

$$= (x+5)(4x-1)$$



Une vérification à l'aide de la calculatrice n'est jamais inutile !
On peut lire une valeur approchée des racines sur l'axe des abscisses.

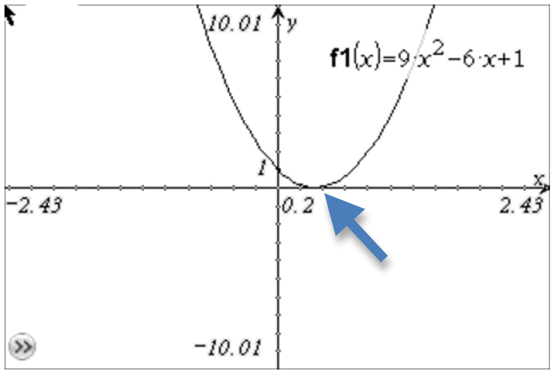
b) On cherche les racines du trinôme $9x^2 - 6x + 1$:

Calcul du discriminant : Δ = (-6)^2 – 4 x 9 x 1 = 0

La racine (double) est : $x_0 = -\dfrac{-6}{2 \times 9} = \dfrac{1}{3}$

On a donc : $9x^2 - 6x + 1 = 9\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2$

$= (3x-1)^2$



III. Signe d'un trinôme

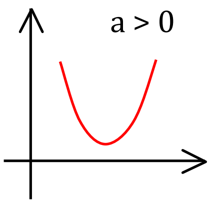
Vidéo https://youtu.be/sFNW9KVsTMY
Vidéo https://youtu.be/pT4xtI2Yg2Q

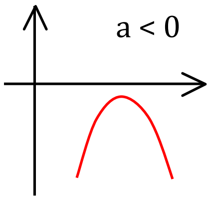
Remarque préliminaire :
Pour une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$:
- si a > 0, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le haut : 
- si a < 0, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le bas : 

Propriété : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si Δ < 0 :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	Signe de a

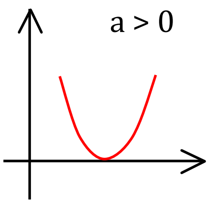


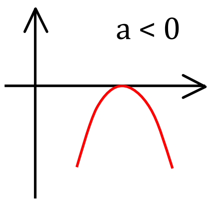


L'équation $f(x)$=0 n'a pas de solution donc la courbe de f ne traverse pas l'axe des abscisses.

- Si Δ = 0 :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de a

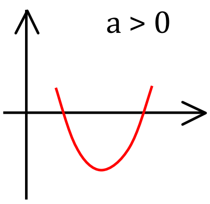


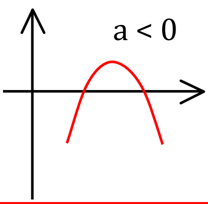


L'équation $f(x)$=0 a une solution unique donc la courbe de f admet son extremum sur l'axe des abscisses.

- Si Δ > 0 :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a





L'équation $f(x)$=0 a deux solutions donc la courbe de f traverse l'axe des abscisses en deux points.

Méthode : Résoudre une inéquation

Vidéo https://youtu.be/AEL4qKKNvp8

Résoudre l'inéquation suivante : $x^2+3x-5<-x+2$

On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier le signe du trinôme.

$x^2+3x-5<-x+2$ équivaut à $x^2+4x-7<0$

Le discriminant de x^2+4x-7 est Δ = 4^2 – 4 x 1 x (-7) = 44 et ses racines sont :

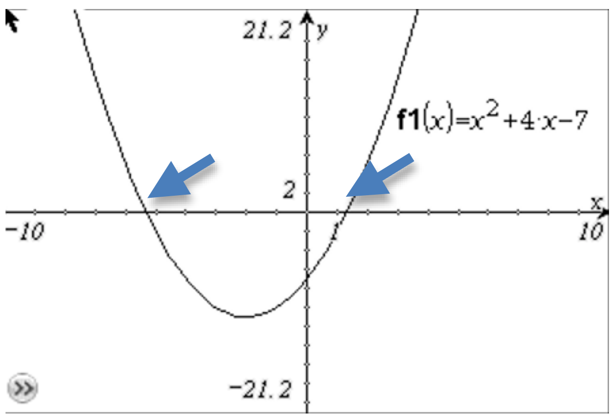
$x_1=\dfrac{-4-\sqrt{44}}{2\times 1}=-2-\sqrt{11}$ et $x_2=\dfrac{-4+\sqrt{44}}{2\times 1}=-2+\sqrt{11}$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{11}$		$-2+\sqrt{11}$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	–	0	+	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2+3x-5<-x+2$ est donc $\left]-2-\sqrt{11};-2+\sqrt{11}\right[$.

Une vérification à l'aide de la calculatrice n'est jamais inutile !
On peut lire une valeur approchée des racines sur l'axe des abscisses.



Un logiciel de calcul formel permet également de contrôler le résultat :

$$\text{solve}\left(x^2+3\cdot x-5<-x+2,x\right)$$
$$-\left(\sqrt{11}+2\right)<x<\sqrt{11}-2$$